

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Уральский государственный педагогический университет»
Институт математики, информатики и информационных технологий

Т. Л. Блинова, Т. А. Унегова

Модель деятельности учителя математики по
формированию представлений
учащихся о значимости математики в жизни общества

Пособие для учителя

Екатеринбург

2014

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Уральский государственный педагогический университет»
Институт математики, информатики и информационных технологий

Т. Л. Блинова, Т. А. Унегова

Модель деятельности учителя математики по
формированию представлений учащихся о значимости
математики в жизни общества

Пособие для учителя

Екатеринбург

2014

УДК 371.124:51 (075.8)

ББК Ч 426.221+Ч 420.421_{я7}

Б 69

Рецензенты

Т.И. Уткина – доктор педагогических наук, профессор
(Орский гуманитарно-технологический институт, филиал ГОУ ОГУ)

И.Н. Семёнова – кандидат педагогических наук, профессор
(Уральский государственный педагогический университет)

Блинова, Т. Л. **Модель деятельности учителя математики по формированию представлений учащихся о значимости математики в жизни общества** / Блинова Т. Л., Унегова Т. А. : Пособие для учителя / ФБГОУ ВПО «Урал.гос.пед.ун-т». – Екатеринбург, 2014. – 143 с.

В пособии представлена модель управления деятельностью учителя математики по организации взаимодействия с учреждениями социальной сферы. В качестве средства реализации теоретических положений предлагается конкретный практический материал, который может быть использован учителем в процессе обучения математике.

Материалы пособия адресованы студентам, бакалаврам, магистрантам педагогических вузов, учителям школ, преподавателям вузов.

УДК 371.124:51 (075.8)

ББК Ч 426.221+Ч 420.421_{я7}

Б 69

©ФГБОУ «Уральский государственный педагогический университет», 2014

©Блинова Т. Л., Унегова Т. А., 2014.

Содержание

Введение	4
Рекомендации по организации деятельности учителя	7
Дидактические материалы в помощь учителю	
<i>Математика и музыка</i>	
Теоретический материал «Поверил я алгеброй гармонию»	11
Рекомендации по использованию теоретического материала	21
Литература	22
<i>Математика и живопись</i>	
Часть 1. Симметрия и асимметрия в живописи	23
Часть 2. Перспектива в живописи	29
Рекомендации по использованию теоретического материала	45
Литература	46
<i>Математика и архитектура</i>	
Симметрия и асимметрия в архитектуре	48
Рекомендации по использованию теоретического материала	
Вариант 1. Серия уроков по теме «Симметрия в архитектуре города Екатеринбурга»	50
Часть 1. Математический аспект понятия симметрии	51
Часть 2. Экскурсия по городу Екатеринбургу	58
Часть 3. Комплект заданий по теме «Симметрия»	76
Вариант 2. Стиль модерн в архитектуре города Екатеринбурга	82
Часть 1. Характеристика стиля модерн	82
Часть 2. Пешеходная экскурсия по теме «Архитектура Екатеринбурга в стиле модерн»	93
Часть 3. Автобусная экскурсия по теме «Архитектура Екатеринбурга в стиле модерн»	102
Задания для учащихся	111
Глоссарий	111
Литература	122
<i>Математика и спорт</i>	
Математика и легкая атлетика	123
Математика и шахматы	124
Математика в экономике спорта	124
Рекомендации по использованию теоретического материала	131
Литература	143

Введение

Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования определяет следующие требования к результатам освоения образовательной программы основного общего образования в предметной области «Математика»:

- осознание значения математики в повседневной жизни человека;
- формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления.

Для реализации данных требований современному педагогу приходится задумываться о том, что в новой школе необходимо по-новому взглянуть на организацию процесса обучения математике. Учителю необходимо изыскать возможности для повышения заинтересованности учащихся в изучении этого сложного предмета, сделать его менее оторванным от действительности и показать, как владение математическим знанием помогает специалистам разных профессий решать встающие перед ними задачи. Причём не только профессиональные, но и чисто житейские.

Актуальность нового видения усиливается всё нарастающей тенденцией математизации существующих наук. Математические идеи и методы, в частности, метод математического моделирования и статистические методы активно используются при решении задач, встающих перед исследователями практически во всех современных областях знаний. Именно поэтому многие выпускники школ в своей взрослой жизни могут столкнуться с необходимостью использовать свои математические знания и, обладая достаточно широким математическим кругозором, справиться с реальной проблемой.

Представляется, что учитель может привлечь для работы с учащимися разных возрастов организации социальной сферы. К социальной сфере относятся: образование, здравоохранение, физическая культура и спорт, культура и искусство, средства массовых коммуникаций, торговля и

общественное питание, жилищно-коммунальное хозяйство, транспорт, социальное страхование, социальное обслуживание, пенсионное обеспечение.

Заинтересованность учителя, его информированность о том, в какие организации можно обращаться, какие темы можно предложить для беседы, поможет учащимся адаптироваться в социуме, определиться с выбором будущей профессии.

Исследование, проведённое в городе Екатеринбурге, показало, что в городе есть такие учреждения и такие специалисты, которые готовы сотрудничать с учителем математики.

Например:

1. Музыкальные школы.
2. Детские школы искусств.
3. Детские юношеские спортивные школы.
4. Архитектурная академия.
5. Музеи.
6. Бюро путешествий и экскурсий.

Таким образом, предметная область «Математика» предоставляет современному учителю широкую область деятельности для реализации требований стандарта, формирования компетентности обучаемых, подготовки их к успешной самореализации в будущей профессиональной деятельности.

Цель данного пособия – познакомить читателя с теоретическими основами организации взаимодействия учителя математики с учреждениями социальной сферы, а также проиллюстрировать представленные положения на конкретных практических примерах.

В силу того, что сложно установить первоисточники некоторых иллюстрационных материалов, мы считаем возможным опустить некоторые ссылки и привести перечень используемых материалов в общем списке литературы по каждому разделу.

Авторы пособия выражают благодарность кандидату педагогических наук, пианисту и аранжировщику, доценту кафедры художественного образования ФГБОУ ВПО «УрГПУ» А.Б.Бородину, а также студентам института математики, информатики и информационных технологий ФГБОУ ВПО «УрГПУ», оказавшим помощь в подборе практических материалов.

Рекомендации по организации деятельности учителя

В деятельности учителя по организации взаимодействия с учреждениями социальной сферы можно выделить следующие этапы:

1. Аналитический (пропедевтическая работа).
2. Информационно-просветительский (главная идея – вооружение школьников необходимой информацией).
3. Информационно-практический (проведение конкретных теоретических и практических занятий, экскурсий).

1. Аналитический этап

На данном этапе необходимо:

А) Проведение профессиональной психодиагностики. Она направлена на помощь школьнику в самопознании своих возможностей и поиска оптимальных методов их реализации.

Можно выделить информационно-справочные, просветительские методы:

- профессиограммы – краткие описания профессий; справочная литература;
- учебные фильмы и видеофильмы;
- использование средств массовой информации;
- беседы-интервью закрытого типа (по строго обозначенным вопросам);
- открытые беседы-интервью (с возможностью некоторого отвлечения от заранее заготовленных вопросов);
- опросники профессиональных способностей;
- личностные опросники;
- проективные личностные тесты;
- наблюдение, сбор косвенной информации, психофизиологические обследования;
- использование различных игровых и тренинговых ситуаций и т.д.

Б) Для выявления приоритетов школьников необходимо применять такие виды практической деятельности как:

- написание эссе;
- решение задач практико-ориентированного характера;
- работа над рефератами с самостоятельным выбором темы или направления исследования.

В) Проведение анкетирования родителей по двум направлениям:

- определение предпочтений родителей учащихся;
- выявление возможности участия родителей в дальнейшей совместной деятельности на втором и третьем этапе.

2. Информационно-просветительский этап

- организация встреч школьников со специалистами различных профессий;
- показ учебных фильмов и видеофильмов;
- ознакомление учащихся с информационно-поисковыми системами; профессиональная реклама и агитация;
- проведение познавательных и просветительских лекций, профориентационных уроков.

3. Информационно-практический этап

- экскурсии школьников культурно-просветительского характера,
- экскурсии школьников на предприятия и в учебные заведения,
- различные ярмарки профессий и их модификации и т.п.

В зависимости от этапа можно выделить соответствующие цели и содержание деятельности участников образовательного процесса (Таблица1).

Таблица 1

Этапы деятельности учителя по организации взаимодействия обучающихся с учреждениями социальной сферы

Этапы деятельности	Цель	Содержание
Аналитический	Пропедевтическая работа по выявлению предпочтений обучающихся	<ol style="list-style-type: none"> 1. Проведение профессиональной психодиагностики обучающихся. 2. Анкетирование родителей обучающихся для определения их предпочтений
Информационно-просветительский	Знакомство обучающихся с необходимыми теоретическими знаниями	<ol style="list-style-type: none"> 1. Изучение необходимой теории на уроках математики. 2. Встречи со специалистами учреждений социальной сферы. 3. Показ учебных фильмов.
Информационно-практический	Воплощение на практике	<ol style="list-style-type: none"> 1. Экскурсии школьников культурно-просветительского характера. 2. Экскурсии на предприятия и в учебные заведения.

В Таблице 2 приведены ожидаемые предметные, метапредметные и личностные достижения школьников в зависимости от организации совместной деятельности участников образовательного процесса.

Таблица 2

Ожидаемые предметные, метапредметные и личностные достижения школьников

Этапы деятельности	Уровни развития обучаемых		
	Предметный	Метапредметный	Личностный
Аналитический	В рамках учебного предмета освоение новых знаний, специфических для данной предметной области	Освоение универсальных учебных действий (регулятивных, познавательных, коммуникативных)	Готовность к личностному самоопределению, сформированность мотивации к целенаправленной познавательной деятельности
Информационно-просветительский	Способность к преобразованию и применению в различных ситуациях умений, специфических для данной предметной области	Развитие самостоятельности в планировании и осуществлении учебной деятельности	Сформированность системы значимых социальных и межличностных отношений, ценностно-смысловых установок, отражающих гражданскую позицию
Информационно-практический	Формирование научного типа мышления, научных представлений о ключевых теориях, владение научной терминологией	Самостоятельность в организации учебного сотрудничества с педагогами и сверстниками, в построении индивидуальной образовательной траектории	Способность ставить цели и строить жизненные планы, способность к осознанию российской идентичности в поликультурном социуме

Дидактические материалы в помощь учителю

Математика и музыка

Поверил я алгеброй гармонию...

А.С.Пушкин. Моцарт и Сальери

Взаимосвязью между музыкой и математикой интересовались ещё в далёкой древности. Присутствие в музыке математического компонента очевидно. Более того, по мнению известного русского философа А. Ф. Лосева «музыка и математика – *одно и то же* в смысле идеальности (нефизичности) сферы, к которой то и другое относится, ... математика и музыка различаются только по способу конструирования предмета в сознании». Алексей Федорович внес большой вклад в развитие философии музыки, представляя музыку как предмет логики.

И в античности у пифагорейцев музыка рассматривалась не столько как искусство, сколько как наука, а именно – наука о числах. В основу музыкальной системы пифагорейцев легли два закона, открытых Пифагором и Архитом, крупным теоретиком в области пифагорейской музыки:

1. Две звучащие струны дают **консонанс** (благозвучие), если их длины относятся как целые числа, образующие треугольное число $10=1+2+3+4$, то есть 1:2, 2:3, 3:4. Причём, чем меньше число n в отношении $n:(n+1)$, тем созвучнее получается интервал.

2. Высота тона определяется частотой колебания струны ω , которая обратно пропорциональна длине струны l : $\omega = \alpha / l$.

Таким образом, музыка была ближайшим приложением арифметики и многие чисто музыкальные проблемы создавали стимулы для развития математики. Средневековые музыканты часто для придания своим произведениям геометрической стройности пользовались числовыми закономерностями, в том числе и знаменитыми «числами Фибоначчи». Интересно, что и в двадцатом столетии известнейшие композиторы И. Ф. Стравинский и А. Н. Скрябин также экспериментировали с числами

Фибоначчи и пытались выстроить художественную форму в соответствии с пропорциями «золотого сечения».

Но начиналось всё с поиска числового выражения гармонии.

В основе всей музыки лежит *музыкальный тон* – звук определённой частоты. Музыкальный тон есть колебательный процесс в воздухе с некоторой фиксированной частотой. Так, тон «ля» первой октавы соответствует процессу с частотой 440 герц (400 колебаний в секунду). Это число является международным стандартом. Существует легенда, что этот звук каждое утро на рассвете издавала огромная статуя (один из двух колоссов Мемнона), установленная около древнеегипетского города Фивы. Музыканты приходили к ней настраивать свои инструменты. Увы, в наше время колосс уже не звучит.

Человеческое ухо способно воспринимать тоны от 16 до 20000 герц, но для исполнения музыки используют весьма небольшое количество тонов. Какие же именно тоны надо включить в музыкальную шкалу? Этот вопрос и не возник бы, если бы на любом музыкальном инструменте можно было получить любой тон, как на скрипке или виолончели. Однако, есть инструменты – фортепиано, арфа и др. – у которых в этом смысле возможности весьма ограничены.

При построении температурной шкалы поступают просто: точку замерзания воды принимают за 0, а точку кипения – за 100. И этот интервал делят на 100 равных частей. В музыке же огромную роль играют *созвучия* – одновременные звучания нескольких звуков разной высоты. Но далеко не все сочетания благозвучны. Поэтому желательно включать такие тоны, которые вместе с данным тоном звучат наиболее естественно.

Монохорд древних греков – один из первых струнных музыкальных инструментов. Он представлял собой четырёхугольный ящик длиной около 1 метра, необходимый для усиления звука. Сверху натягивалась струна. Под струной на верхней крышке была начерчена шкала, с помощью которой можно было делить струну на части. Снизу струна поджималась

передвижной подставкой. Конечно, как музыкальный инструмент монохорд был слишком примитивным. Зато, снабжённый шкалой делений струны, он стал прекрасным физическим прибором и учебным пособием для изучения законов звучащих тел.

Частота, с которой колеблется вся струна целиком, определяет так называемый основной тон. Колебания частей струны вызывают появление призвуков – **обертонов** основного тона (от немецкого *Obertone* – высокий звук). Самый сильный обертон возникает при колебаниях $1/2$ части струны, всё менее и менее выраженный – при $1/3$, $1/4$, $1/5$ и т.д. Соотношение частот (или высот) этих обертонов выглядит соответственно как $1:2:3:4:5:6\dots$ Обертоны слышны гораздо слабее и не мешают основному восприятию звука, но придают звуку ту или иную **тембровую окраску**. То, что одна и та же нота в исполнении разных инструментов звучит по-разному, вызвано присутствием разных обертонов в **палитре** этих инструментов.

В школе Пифагора были выделены **чистые** благозвучные интервалы.

Длина струны	Частота колебаний	Отношение частот	Название интервала
$l_1 = 1$	$f_1 = 1$	1	Основной тон
$l_2 = \frac{3}{4}$	$f_2 = \frac{4}{3}$	4:3	Чистая кварта
$l_3 = \frac{2}{3}$	$f_3 = \frac{3}{2}$	3:2	Чистая квинта
$l_4 = \frac{1}{2}$	$f_4 = 2$	2	Октава

То, что струна, издающая звук с частотой f герц, производит колебания также и с частотой $2f$ герц, можно проверить на фортепиано. Нажмите без звука клавишу $ля_1$ (ля первой октавы, которая соответствует тону частоты 440 герц) и, не отпуская её, ударьте клавишу $ля_M$ (ля малой октавы, соответствующую тону частоты 220 герц). Когда короткое звучание $ля_M$ прекратится, вы услышите звучание $ля_1$, пришедшей в резонанс с $ля_M$.

Интервал между данным звуком и звуком двойной частоты называется октавой. Октава даёт благозвучное сочетание звуков. Итак, естественным образом вводится первое условие: *музыкальная шкала вместе с частотой f должна содержать и частоту $2f$* . Логично добавить, что *должна присутствовать и частота $\frac{1}{2}f$* .

При построении музыкальной шкалы хотелось бы также, чтобы мелодию по желанию можно было воспроизводить выше или ниже, чем в оригинале, чтобы её можно было петь и высоким голосом и очень низким. Но для этого надо обеспечить сохранение *отношений* частот тонов в каждом интервале, иначе мелодия будет искажаться. Таким образом, формулируется второе условие для музыкальной шкалы: *шкала должна допускать возможность переноса мелодий без искажения на любой интервал*.

Проведем небольшое исследование.

Пусть в пределах одной октавы шкала образуется следующими ступеньками:

$$f = f_0 < f_1 < f_2 < \dots < f_{m-1} < f_m = 2f.$$

Сами по себе эти звуки уже образуют простейшую мелодию. Перенесем её вверх на одну ступеньку, чтобы мелодия началась со звука f_1 . Тогда она должна закончиться звуком f_{m+1} – октавным повторением звука f_1 . При этом, между f_m и f_{m+1} не должно быть никакого промежуточного тона. Действительно, если такой тон f' существует, то его октавное понижение – тон $\frac{1}{2}f'$ – должен находиться между f_0 и f_1 , а такой ступеньки там нет.

Таким образом, новая мелодия имеет вид:

$$f_1 < f_2 < \dots < f_{m-1} < f_m < f_{m+1}.$$

Так как мелодия не искажается, то отношения соответствующих частот сохраняются:

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{f_2}{f_1}; \quad \frac{f_2}{f_1} = \frac{f_3}{f_2}; \quad \dots; \quad \frac{f_m}{f_{m-1}} = \frac{f_{m+1}}{f_m}.$$

Отсюда следует, что частоты $f_0; f_1; f_2; \dots; f_{m-1}; f_m$ образуют геометрическую прогрессию. Её знаменатель q удовлетворяет условию $f_m = q^m f_0 = 2f_0$, откуда $q^m = 2$ и, стало быть, $q = \sqrt[m]{2}$. Если перейти к логарифмам частот f_i по основанию 2, то геометрическая прогрессия частот перейдёт в арифметическую с разностью $d = \log_2 \sqrt[m]{2} = \frac{1}{m}$ и будет иметь вид:

$$\log_2 f_0 = A; \quad \log_2 f_1 = A + \frac{1}{m}; \quad \log_2 f_2 = A + \frac{2}{m}; \quad \dots; \quad \log_2 f_m = A + 1.$$

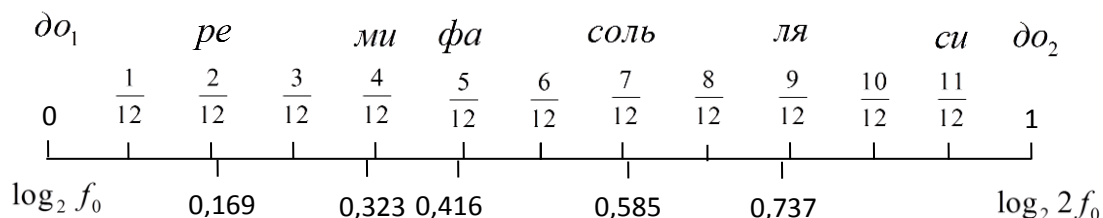
Осталось определиться с количеством m ступенек музыкальной шкалы в пределах одной октавы.

После октавы самый приятный для слуха интервал – чистая квинта. Поэтому при построении музыкальной шкалы хочется ввести ещё одно условие: *вместе с каждой частотой f должна присутствовать и частота $3f$* . А потому между f и $2f$ должен быть тон $\frac{1}{2} \cdot 3f = \frac{3}{2}f$. И вот тут натываемся на противоречие: *условие равномерности логарифмической шкалы тонов несовместимо с требованием наличия в шкале чистой квинты*. От чего-то надо отказываться (!). Однако только равномерная шкала даёт возможность **транспозиции мелодии** – переноса её без искажения вверх или вниз. Поэтому приходится отказаться от чистых квинт. В этом случае количество m ступенек в пределах одной октавы подбирается с использованием подходящих дробей так называемой цепной дроби

$$\frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}, \quad \text{где } a_1, a_2, a_3, \dots \text{ целые положительные числа,}$$

так, чтобы точки деления на шкале находились как можно ближе к реальной частоте желанного тона, или, более точно, разность была меньше, чем 1 герц (что соответствует 0,004 на логарифмической шкале). В этом случае

человеческое ухо отличия не заметит. Анализ подходящих дробей приводит к результату: поставленные задачи будут решены, если делить октаву на 12 ступеней, то есть следует брать $m=12$. Вот как в этом случае выглядит музыкальная шкала длиной в октаву (в верхней строке схемы – названия основных звуков, а в нижней – логарифмы их частот):



Наименьший звуковой интервал называется **полутон**, два соседних полутона дают интервал **тон** (не путать со звуком фиксированной высоты, который тоже называется *тон*). Так, например, между звуками *ре* и *ми* разность частот образует тон, а между *ми* и *фа* – полутон. На схеме указаны семь **основных звуков**, есть ещё пять **вспомогательных**. Их обозначают добавлением к соседнему основному звуку слов «**бемоль**» или «**диез**», что означает «на полутон ниже» или «на полутон выше». На фортепиано основные звуки извлекаются нажатием белых клавиш, а вспомогательные – чёрных.

Мелодия на белых клавишах *до, ре, ми, фа, соль, ля, си, до* образует **натуральную гамму до мажор**. Слово «мажор» указывает на интервальный состав гаммы: *тон-тон-полутон-тон-тон-тон-полутон*. Как и любую мелодию, гамму можно транспонировать (переносить вверх или вниз) и играть от любого звука. Тогда в названии гаммы вместо слова «до» появится название этого звука. Так получается 12 мажорных гамм с разными названиями.

Иную окраску имеет **натуральная гамма до минор**: *до, ре, ми бемоль, фа, соль, ля бемоль, си бемоль, до*. Интервальный состав гаммы: *тон-полутон-тон-тон-полутон-тон-тон*. Понятно, что минорных гамм с разными названиями столько же, сколько и мажорных.

12-ступенный *равномерно темперированный строй* возник в обстановке поисков «идеального» строя учёными разных специальностей. Исторически предшествующий ему *натуральный строй* имел ряд недостатков – прежде всего, он не позволял *транспонировать* мелодию и *модулировать* в достаточно большое количество тональностей без возникновения существенных *диссонансов* (неблагозвучий).

Невозможно с достоверностью указать, кто именно изобрёл равномерную темперацию. Среди первых учёных, предлагавших практические способы деления октавы на 12 равных интервалов, были Генрих Грамматеус (1518) и Винченцо Галилей (1581). Одним из первых авторов, давших теоретическое обоснование 12-ступенной равномерной темперации был... китайский принц Чжу Цзайюй (1584). В Европе примерно в то же время над проблемой трудился фламандский математик Симон Стевин.

Непосредственным предшественником *равномерно темперированного* был *хорошо темперированный строй* – целое семейство неравномерных темпераций, тем не менее, позволявших вполне успешно играть в любой из тональностей. Одним из теоретиков и пропагандистов такого строя был Андреас Веркмейстер (1691) — немецкий композитор и органист.

Многие исследователи разделяют мнение, что «Хорошо темперированный клавир» Иоганна Себастьяна Баха, не понаслышке знакомого с работами Веркмейстера, написан для инструментов именно с такой неравномерной темперацией. Однако другие авторы считают, что этот труд – создание И. С. Бахом 24 пьес, по одной на каждую тональность – явилось весомым аргументом в пользу именно равномерной темперации.

Конечно, с решением задачи о построении музыкальной шкалы связь между математикой и музыкой не обрывается.¹

Рассматривая роль математики в музыкальном искусстве, в первую очередь следует обратить внимание на то, что численные символы буквально

¹ Последующий текст написан кандидатом педагогических наук А.Б.Бородиным, пианистом и аранжировщиком.

пронизывают его структуру, начиная с метроритмической и звуковысотной организации музыкальной ткани и заканчивая цифровым кодированием звуковой информации.

Музыка – искусство «реального времени», то есть любое музыкальное сочинение разворачивается перед слушателем постепенно и человек, воспринимающий музыку, всегда «находится» только в какой-то одной его точке – такте, ноте, аккорде. Естественно, время в музыке это не философская категория, а вполне определенная система отсчета. В связи с этим можно вспомнить знаменитую фразу пианиста и дирижёра Ганса фон Бюлова – «вначале был ритм». Действительно, без чёткой системы организации музыкального материала во времени существование музыкального искусства было бы невозможным.

Формообразование музыкальных произведений подчиняется правилу математической пропорции (*божественной пропорции*). Музыковедами и композиторами употребляется термин «*точка золотого сечения*²», которым обозначают важный драматургический момент музыкального сочинения – кульминацию, модуляцию и так далее, который приходится на подобную воображаемую точку бифуркации. Расчёт *архитектоники* (или композиции) произведения некоторыми композиторами проводился с помощью математических подсчётов. Например, Скрябин часто рассуждал о том, какую значительную роль играет математика – в частности, геометрия – в музыке. «У меня бывает иногда целое вычисление при сочинении, вычисление формы и вычисление модуляционного плана. Он не должен быть случайным», – говорил Александр Николаевич. Различные математические принципы применяют и другие композиторы при создании музыкальных произведений. Так, С. Губайдуллина и Э. Денисов использовали принцип рядов Фибоначчи.

² Точка, которая делит (временной) отрезок на две части так, что отношение всего отрезка к большей его части равно отношению большей части отрезка к меньшей.

В музыкально-компьютерных технологиях математические принципы используются повсеместно. Например, при частотном анализе фонограммы в звуковых редакторах применяется *алгоритм быстрого преобразования Фурье*³. Он необходим для быстрых вычислений спектра звукового сигнала и его отслеживания в реальном времени. Математические вычисления применяются также для анализа фазы и уровня сигнала. В анализаторе фазы иногда есть зона индикации противофазных звуковых колебаний, которая позволяет автоматически регистрировать смещение фазы в одном из каналов фонограммы. Любой из программных анализаторов обладает наглядным графическим интерфейсом, позволяющим осуществлять мониторинг изменений параметров звукового сигнала. Показателен 3D-анализатор в программе WaveLab, который в качестве результата анализа предоставляет звукорежиссёру *трёхмерную графическую модель*, слепок анализируемого звука (рис.1).

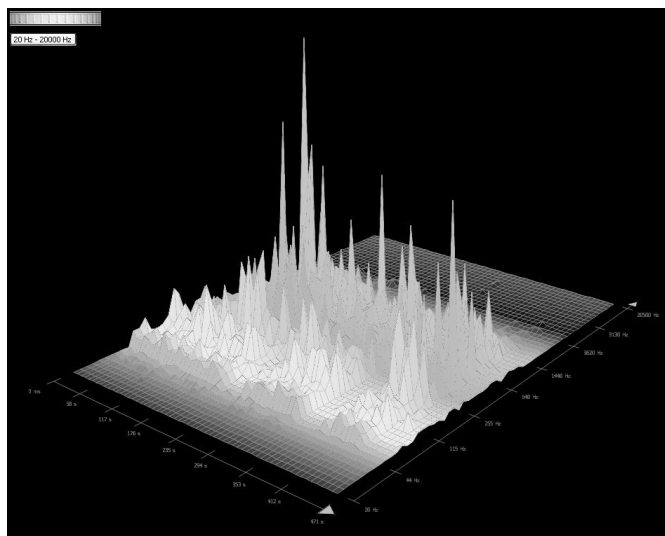


Рис. 1

В приборах динамической обработки звукового сигнала, в частности в компрессоре используется термин «соотношение» (*Ratio*), которым обозначается *функция установления пропорции* сжатия динамического

³ Описание FFT-анализатора из инструкции к программе WaveLab: FFT (Fast Fourier Transform) analysis is a mathematical method to convert a waveform from the Time Domain to the Frequency Domain. FFT uses various mathematical shortcuts to carry out a spectral analysis, trading computational speed for limitations in the number of samples and frequency bands used in the analysis.

диапазона фонограммы. Данная пропорция указывает на то, во сколько раз будет сжат звуковой сигнал.

Числовые шкалы присутствуют в приборах динамической, частотной обработки, в программных и аппаратных процессорах эффектов как для установления определённого значения конкретной функции прибора, так и для наглядной индикации процессов в звуковом тракте (рис.1).

Цифровой интерфейс музыкальных инструментов MIDI (Musical Instrument Digital Interface), являющийся ключевым в музыкально-компьютерных технологиях, позволяет фиксировать и воспроизводить параметры исполнения на цифровом музыкальном инструменте, а также редактировать полученные данные и программировать MIDI-сообщения пошагово в программе-секвенсере. Каждый из регистрируемых параметров «загоняется» в **дискретный диапазон**. К примеру, такие параметры интерфейса как громкость канала, панорама, скорость нажатия на клавишу и тому подобное, имеют по 128 значений.

При определении темпа фонограммы применяются так называемые бит-калькуляторы. Процесс **калькуляции** осуществляется следующим образом. В поле Beats вводим числовое значение количества долей музыкального фрагмента или композиции. Для подсчёта их количества определяем размер сочинения и количество тактов аудиоматериала. Далее умножаем число долей в такте на количество тактов – например, $4 \cdot 106 = 424$. Полученную сумму вводим в окно Beats и нажимаем кнопку Refresh– произойдет подсчёт значения темпа (рис. 2).



Рис. 2

Математический подход наблюдается и *при анализе исполнения музыкантов* с целью выявления специфических особенностей интерпретации и индивидуальной манеры игры на инструменте. П. В. Лобанов в написанной им книге «А. Н. Скрябин – интерпретатор своих композиций» приводит графический результат замеров изменений темпа исполнения Скрябиным собственных сочинений.

В целом, можно заключить, что при внешней иррациональности и направленности на эмоциональное воздействие музыкальное искусство достаточно упорядочено и тесно связано с математической наукой. Думается, что с доминированием в наше время так называемых «цифровых технологий» это влияние только усилится.

Рекомендации по использованию теоретического материала

Доклад-беседу проводят два человека: учитель математики и специалист по компьютерным технологиям в музыке. Первый рассказывает, как понятие логарифма помогло в создании равномерно темперированного строя музыкальных инструментов. Второй описывает возможности современных музыкально-компьютерных технологий и иллюстрирует свой рассказ демонстрацией некоторых из них в компьютерном классе.

Беседа может проходить по следующему плану.

1. Пифагорейская музыка – наука о числах.
2. Монохорд – античный струнный музыкальный инструмент с одной струной.
3. Устройство музыкальной шкалы (тоны и логарифмы).
4. Формообразование музыкальных произведений и математическая пропорция.
5. Цифровой интерфейс музыкальных инструментов как ключевой момент в музыкально-компьютерных технологиях.

В беседе можно обратить внимание учащихся на *идентичность* некоторых математических и музыкальных понятий: дроби и длительности

звуков, действия с дробями и музыкальный размер, пропорции и точка золотого сечения, логарифмы и равномерно темперированный музыкальный строй, числовые интервалы и музыкальные интервалы, период функции и период как один из элементов музыкальной формы, циклические способы решения уравнений, неравенств и циклические формы музыкальных произведений, таких, например, как сонатный цикл или сюита.

Замечание. Материал можно также использовать как точечные вкрапления на уроках математики в разных классах при изучении соответствующих тем.

Литература

1. Шилов Г. Е. Простая гамма (устройство музыкальной шкалы) // Популярные лекции по математике. – 1963. – № 37. – 20 с.
2. Музыка и математика // <http://credonew.ru> URL: content/view/562/31 (дата обращения: 10.10.2013)
3. Статьи из Википедии – свободной энциклопедии.

Математика и живопись

Часть 1. Симметрия и асимметрия в живописи

Красота тесно связана с симметрией.

Г. Вейль

Понимание симметрии как в природных явлениях, так в произведениях искусства берёт своё начало со времён античности. Идеи симметрии (в переводе с греческого *συμμετρία* – соразмерность) восходят к воззрениям древнегреческих философов и математиков и связаны с их исследованиями гармонии мира. Античные скульпторы, художники, архитекторы создавали свои шедевры в соответствии с современными им канонами гармонии. Регулярное и интенсивное изучение категории симметрии начинается конце XVIII века.

Симметрия представляет такую особенность природы, про которую принято говорить, что она фундаментальна, охватывает все формы движения и организации материи. Истоки понятия симметрии уходят в глубокую древность. В. И. Вернадский писал: «...представление о симметрии слагалось в течение десятков, сотен, тысяч поколений. Правильность его проверена коллективным реальным опытом и наблюдением, бытом человечества в разнообразнейших природных земных условиях. Этот опыт многих тысяч поколений ясно указывает на глубокую эмпирическую основу этого понятия и его существования в той материальной среде, в которой жил человек, в биосфере... Переходя к историческому времени, мы видим, что понятие “симметрия” выросло на изучении живых организмов и живого вещества, в первую очередь человека».

Само понятие “симметрия”, связанное с понятием красоты или гармонии, произошло из Древней Греции (5 в. до н.э.). «Симметрия» означает нечто гармоничное, однородное, соразмерное, пропорциональное в объекте, то есть тот способ согласования многих частей, с помощью которого они объединяются в целое. Пифагору принадлежит бессмертная идея о всеобщей гармонии, лежащей в основе мироздания.

Прекрасные образы симметрии демонстрируют произведения изобразительного искусства. Линейные орнаменты, бордюры, паркет, кристаллы, мозаики, картины, если их рассматривать с точки зрения присутствующих в них плоских закономерностей, можно описать той или иной группой симметрий материальных фигур. Богатство симметрий и красота орнаментов кажутся бесконечными.

Итак, добро пожаловать в музей изобразительных искусств. Если внимательно посмотреть вокруг, то можно заметить удивительную особенность строения многих форм и их взаиморасположения. Это свойство – симметрия, равновесие одной формы (или нескольких форм) относительно некой оси или точки. При этом каждой точке в одной части соответствует точно такая же точка в другой.

Конечно, идеальной симметрии в живой природе не существует (разве только в кристаллических решётках). Два листа одного дерева схожи не полностью, правая и левая половинки лица человека чуть-чуть различаются.

У многих народов с древнейших времен симметрия воспринималась как символ стабильности и гармонии. В декоративном искусстве симметрия часто применяется для построения разнообразных орнаментов. В изобразительном искусстве симметрия также стала одним из основных способов организации пространства картины. Симметричная композиция легко воспринимается зрителем, сразу привлекая внимание к центру картины, в котором и находится то главное, относительно которого разворачивается действие.

В древнерусской живописи сложилась образная система, иллюстрирующая религиозные сюжеты. Традиционная композиция иконы чаще всего симметрична, а главные персонажи выделены своим центральным местоположением. Зримый образ Всевышнего обычно располагался строго в центре пространства иконы как символ и смысл первоосновы мира. Симметричные, гармоничные пропорции, создающие впечатление покоя и

величественности, подчеркивали несовершенство и хаотичность земного бытия.

Художники эпохи Возрождения часто использовали язык симметрии в построении своих композиций. Это следовало из их логики понимания картины как изображения идеального мироустройства, где царит разумная организованность и уравновешенность, которые человек может познать и осмыслить. В удивительной картине "Обручение девы Марии" (рис.1) великий Рафаэль воспроизвёл именно такой образ мира, существующего по законам гармонии и строгой логики.



Рис.1

Использованный принцип симметрии создаёт впечатление покоя и торжественности и в то же время некой отстранённости от зрителя. Вход в изящную ротонду и кольцо, надеваемое Иосифом на руку Марии, совпадают с центральной осью симметрии картины. Перекликаются движения фигур юношей и девушек, расположенных справа и слева от основной группы. Симметричными дорожками из гранитных плит вымощена площадь перед

храмом. Такое соотношение элементов углубляет образный смысл произведения, наполняет его многогранной символикой. Таким образом, картина Рафаэля – не только результат вдохновенного порыва художника, но и плод его скрупулёзных вычислений и геометрических построений. В своей картине Рафаэль почти точно использовал осевую симметрию, которую часто называют зеркальной. Однако чаще всего в изобразительном искусстве мы говорим о неполной симметрии – в картинах просто присутствует некоторая "обращённость" к центру, создающая композиционное равновесие.

В картине "Три богатыря" (рис.2) русского художника В. Васнецова по небу движутся тяжелые облака, колышется спелая нива, волнуются могучие кони, с трепещущими от ветра гривами.



Рис.2

Сами герои полны сдерживаемой силы: вся группа чуть сдвинута влево, один из богатырей выдвигает меч, другой прикрывает ладонью глаза, третий, наклонив голову, прислушивается. Из-за этих небольших отклонений от строгой симметричности возникает ощущение внутренней свободы персонажей, их готовности к движению. В главном же композиция картины, близкая к симметрии, помогает художнику воплотить образ неприступной

"богатырской заставы", непоколебимых защитников русской земли, их спокойствия и уверенности.

А вот перед нами знаменитая «Тайная вечеря» Леонардо да Винчи (рис.3) – фреска в трапезной церкви Санта-Мария-делле-Грацие в Милане.



Рис.3

Композиция картины математически строга и проста. В центре её, на фоне светлого пятна окна, расположена фигура Христа. Главная точка картины, куда ведут образы параллельных линий стен и потолка, приходится на правый глаз Христа, который в наклоне головы расположен чуть выше и ближе к зрителю. Таким образом, геометрический центр картины и её смысловой центр строго совпадают, а лучи сходящиеся в главной точке, ещё более нацеливают зрителя в этот центр. Впрочем, порой кажется наоборот; будто из центра картины, из глаз Христа, расходятся во все стороны эти лучи, словно потоки мысли.

Двенадцать апостолов расположены вокруг своего учителя четырьмя группами: по две группы с каждой стороны от него и по три человека в каждой группе. Две ближние к Христу группы компактны и более динамичны: они словно вписаны в два треугольника, обрамляющих

треугольник центральной фигуры. Две крайние группы показаны более спокойно и широко: они образуют статичные фигуры, вписанные в прямоугольники. Две крайние фигуры, завершающие композицию, нарисованы в профиль и прямо: они как бы останавливают волны движения, идущие от центра к краям. Вся композиция строго уравновешена относительно вертикальной оси, проходящей через её главную точку.

Такова геометрия «Тайной вечери». Она очень проста и крайне строга, что наполняет фреску сдержанной внутренней динамикой. «Тайная вечеря» – это и наука (о перспективе), и искусство, которые для Леонардо были слиты в живописи воедино.

Наука и искусство, словно нити холоста, переплетались в полотнах мастеров Возрождения. Живопись переходила в начертательную геометрию, а геометрия – в искусство. Пространство картины было не только симметрично, но и метрично. Всякий раз художник старался не просто показать глубину пространства картины, но как бы вычислить эту глубину. Вот почему ренессансные художники так любили изображать квадраты плиток пола и кессоны (квадратные углубления) потолка, представляющие собой не что иное, как систему координат на плоскости: «ширина-глубина» – анфилады комнат, ряды колонн или ковров (в «Тайной вечере»). Вот почему живописцы Возрождения так любили изображать архитектуру, которая органически перерастала в **архитектонику** изображения.

Современные живописцы редко пользуются парадоксом симметрии, хотя и здесь можно найти интересные примеры. Так, Игорь Грабарь создал прекрасный пейзаж «Березовая аллея» (рис.4), целиком построенный на небольших отклонениях от зеркальной симметрии.

Рассмотренные нами картины являются примерами использования симметричных построений в живописи и позволяют сделать вывод, что в большинстве случаев художники используют осевую (зеркальную) симметрию.

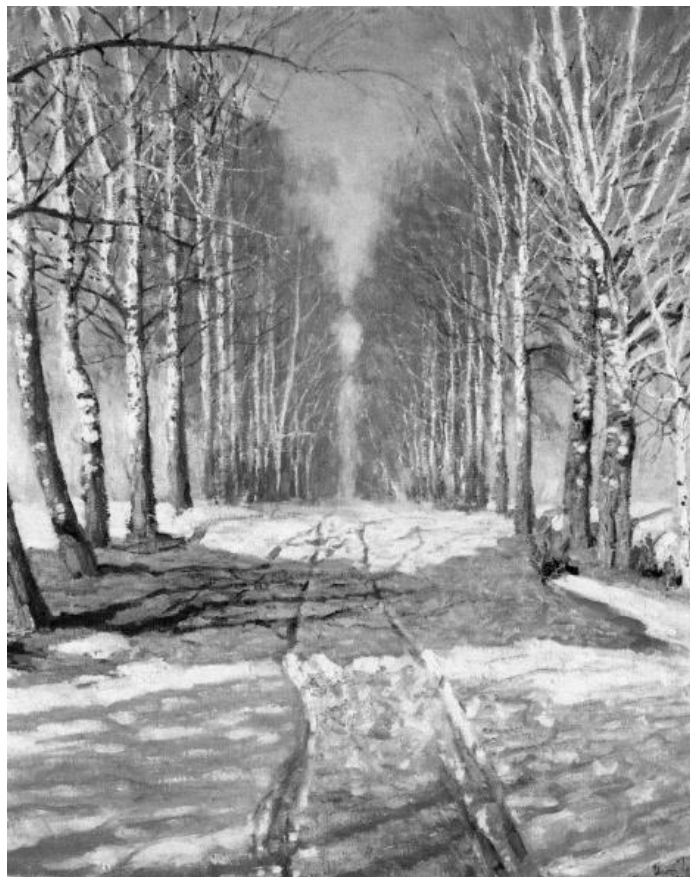


Рис.4

Часть 2. Перспектива в живописи

Перспектива позволяет контролировать пространственные элементы на картине – то, что делает картину правдоподобной.

Билл Мартин

Способность человека изображать окружающую действительность на плоскости, связана с появлением у него абстрактного мышления. Необходимость такого отображения возникла как часть интеллектуальной жизни. Первые наскальные рисунки являлись попыткой познания окружающего мира. Расширяясь и углубляясь в различных направлениях, художественное творчество становилось:

- культовым искусством, служащим религиозным взглядам человека;
- письменностью – способом передачи информации;

- различными изобразительными искусстваами, необходимыми для удовлетворения эстетических требований как общества, так и отдельного человека.

Проблема изображения трёхмерного пространства на двумерной плоскости картины постоянно занимала художников. Каждый из них искал ответы на вопросы: как подать картину реального мира, чтобы зритель увидел то же, что видит сам художник, чтобы ему передалось то впечатление, которое она произвела на художника в действительности, как передать объёмность пространственных объектов, как передать глубину пространства, как направить внимание зрителя на то, что автор считает главным, важным, основополагающим.

Во времена античности и средневековья художники уже умели изображать отдельные предметы (стол, табуретку, дом и тому подобное), однако, их ещё не интересовало, как будет выглядеть пространство между ними. Изображение этого пространства могло осуществляться ими по иным правилам и, чтобы объединить предметы и людей в единую картину, приходилось применять какие-то цветовые или ритмические решения. Потребность изображения не отдельного предмета, а всего пространства, точнее даже *каждой точки* этого пространства, проявилась только в эпоху Ренессанса. Художники эпохи Возрождения решали эту задачу, учитывая два соображения: 1) правила изображения трёхмерного пространства на плоскости должны иметь математическую основу и 2) правила должны опираться на закономерности естественного зрительного восприятия человека.

Метод, позволяющий создавать видимый образ внешнего мира, называли перспективой (линейной перспективой) от французского *perspective* – смотреть сквозь, проникать взором.

Изображение каждой отдельной точки свелось к **центральному проектированию** этой точки на плоскость картины (рис.5). Центром проектирования являлся человеческий глаз, который соединялся

воображаемой прямой с реальной точкой. При пересечении прямой с картинной плоскостью и получалось изображение (проекция) реальной точки. При таком способе должны соблюдаться три важных условия: художник должен смотреть одним глазом, глаз художника должен быть неподвижным, ось зрительного конуса, объемлющего выделенную картину реального мира, должна быть перпендикулярной картинной плоскости.



Рис.5 Гравюра А. Дюрера. Рисование по сетке. Около 1525 г.

Первым художником, воплотившим в своём творчестве представление о перспективе и создавшим в изображении на плоскости иллюзию трёхмерного пространства, был итальянец Джотто (1267—1332) (рис.6,7). Известный историк искусств, архитектор и живописец Джорджио Вазари (Италия, 1511-1574) писал: «И поистине чудом величайшим было то, что век тот, и грубый, и неумелый, возымел силу проявить себя через Джотто столь мудро...».

Теория линейной перспективы впервые появилась у Амброджо Лоренцетти в XIV веке. В эпоху Возрождения она была разработана вновь (Филиппо Брунеллески, Леон Баттиста Альберти). Теория основывалась на простых законах оптики и превосходно подтверждалась практикой.

Открытие способа изображения трёхмерного пространства на плоскости при помощи линейной (прямой) перспективы знаменовало наступление новой эры в европейском искусстве – реализма.



Рис.6 Джотто ди Бондоне. Фреска в Капелле дель Арена в Падуе. 1304-06 гг.



Рис.7 Джотто ди Бондоне. Фреска в Капелле дель Арена в Падуе. 1304-06 гг.

Этот метод замечателен тем, что не связан с художественным образом, а основывается только на законах геометрии и учитывает характер работы

человеческого глаза. Это в принципе вывело теорию перспективы из области художественного творчества и сделало её одной из геометрических дисциплин. Со временем этот метод стали называть **системой научной перспективы**. Позже выяснилось, что созданная система всего лишь один из возможных вариантов, имеющий свои сильные и свои слабые стороны. Интересно, что не все художники приняли эту систему и не все последовательно её применяли. На самом деле, будучи человеком творческим, художник и не обязан строго следовать законам научной перспективы, ведь его задачи гораздо шире протокольно точной передачи пространства и расположенных в нём предметов. Однако и художнику полезно понимать научную основу используемых им изобразительных приёмов.

Рассмотрим подробнее **линейную перспективу**, которая с математической точки зрения представляет собой центральное проектирование с собственным или несобственным (бесконечно удалённым) центром.

В Википедии – свободной энциклопедии можно прочесть следующее:

Проекция (от лат. *projectio* – выбрасывание вперёд) – изображение трёхмерной фигуры на так называемой картинной (проекционной) плоскости способом, представляющим собой геометрическую идеализацию оптических механизмов зрения, фотографии, камеры-обскуры.

Термин *проекция* в этом контексте также означает метод построения такого изображения и технические приёмы, в основе которых лежит этот метод, который широко применяется в инженерной графике, архитектуре, живописи и картографии. Изучением методов построения проекций занимается такая инженерная дисциплина как начертательная геометрия.

Если соединить все точки предмета прямыми линиями (проекционными лучами) с постоянной точкой *O* (центром проекции), в которой предполагается глаз наблюдателя, то на пересечении этих лучей с выбранной плоскостью получается проекция всех точек предмета. Таким

образом, на этой плоскости получается **центральная проекция** предмета, которую называют еще **перспективным изображением** предмета⁴.

При центральном проектировании выделяются:

- предметная плоскость π' , на которой располагаются реальные предметы;
- картинная плоскость π – плоскость изображений;
- линия горизонта AB , или уровень глаза – она является изображением наблюдаемого горизонта;
- точка схода X , расположенная на линии горизонта, в которую сходятся изображения всех прямых, параллельных данной прямой a' . (Если взять все параллельные прямые другого направления b' , то их изображения будут иметь другую точку схода на линии горизонта.)

На двух рисунках (рис.8,9) можно наблюдать способ построения изображений отрезка и двух параллельных прямых, расположенных в предметной плоскости. На первом рисунке построен отрезок PT – изображение отрезка $P'T'$, а на втором – прямые a и b , которые являются изображениями параллельных прямых a' и b' .

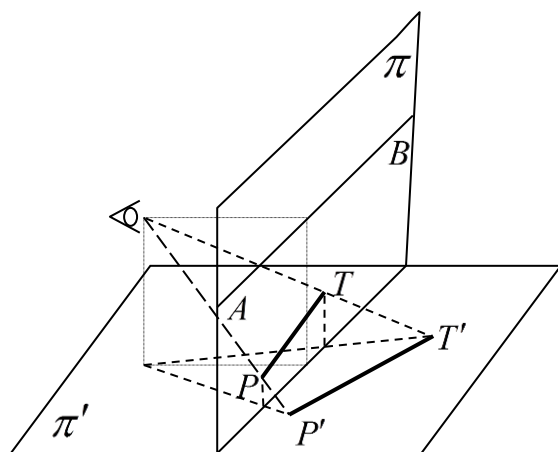


Рис.8

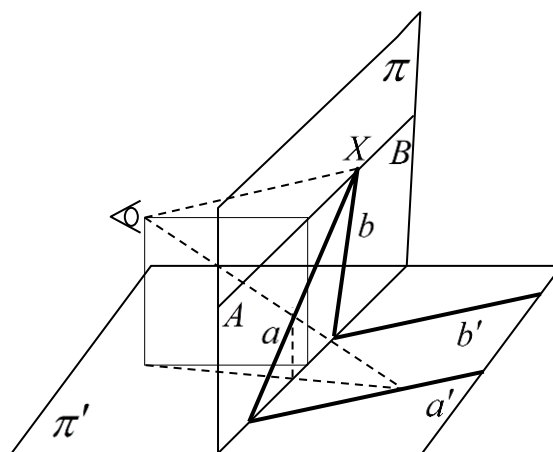


Рис.9

⁴ В математической литературе изображением предмета на плоскости называется не проекция этого предмета, а любая фигура плоскости, подобная его проекции.

Нетрудно видеть, что, подчиняясь законам центрального проектирования, отрезки переходят в отрезки, лучи – в лучи или отрезки, прямые в прямые, если только они не попадают на проекционные лучи (в последнем случае изображение будет представлять собой точку). Изображения параллельных прямых обязательно пересекаются в точке, лежащей на линии горизонта. Образами окружностей и эллипсов являются окружности или эллипсы. Интересно, что проекция параболы или гиперболы может быть эллипсом, который в первом случае касается линии горизонта, а во втором случае пересекает её в двух точках.

При линейной перспективе возможно изображение, имеющее более одной точки схода.

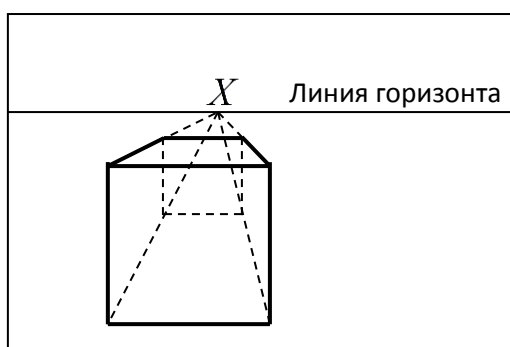


Рис.10

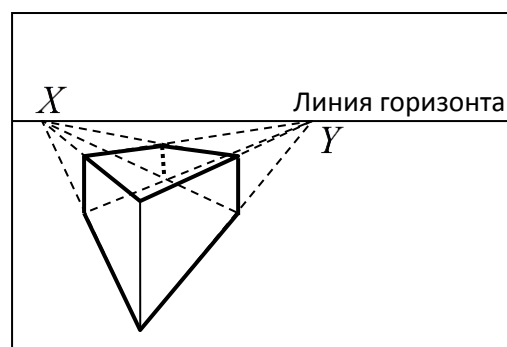


Рис.11

Для примера можно взять и построить на картинной плоскости изображение куба в перспективе с одной точкой схода X (рис.10) и с двумя точками схода X и Y (рис.11).

Существует два вида линейной перспективы: прямая и обратная.

Прямая перспектива рассчитана на неподвижную точку зрения и предполагает единую точку схода на линии горизонта позади изображаемых предметов. При этом предметы уменьшаются пропорционально по мере удаления их от переднего плана (рис.12). Картина может иметь при этом несколько линий горизонтов, несколько точек зрения и другие особенности.



Рис.12

Характерным примером изображения в прямой перспективе может служить фреска «Афинская школа» Рафаэля Санти, 1509-1510 гг. (рис.13) или другое гениальное произведение – «Тайная вечеря» Леонардо да Винчи (рис.3).



Рис.13

При изображении в обратной перспективе предметы представляются расширяющимися по мере удаления от зрителя, словно точка схода линий находится не на горизонте, а внутри самого зрителя. Ниже приведенные изображения одного и того же стула позволяют сравнить воздействие прямой (рис.14) и обратной перспективы (рис.15).

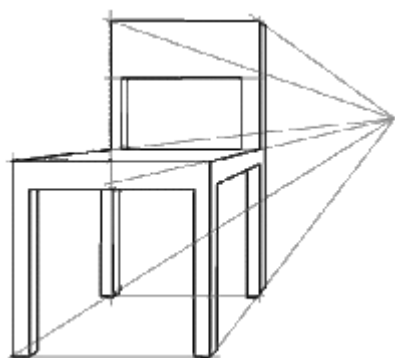


Рис.14

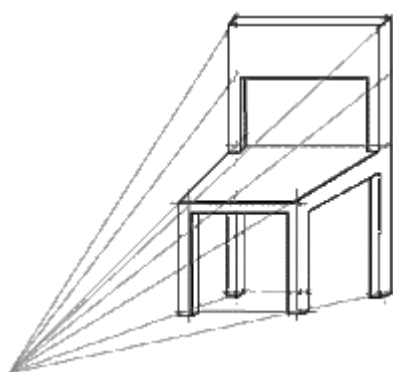


Рис.15

Приём обратной перспективы отдельных предметов использовался в византийской и древнерусской живописи. Примером тому могут служить позднеантичные миниатюры, фрески, мозаики и древнерусские иконы.

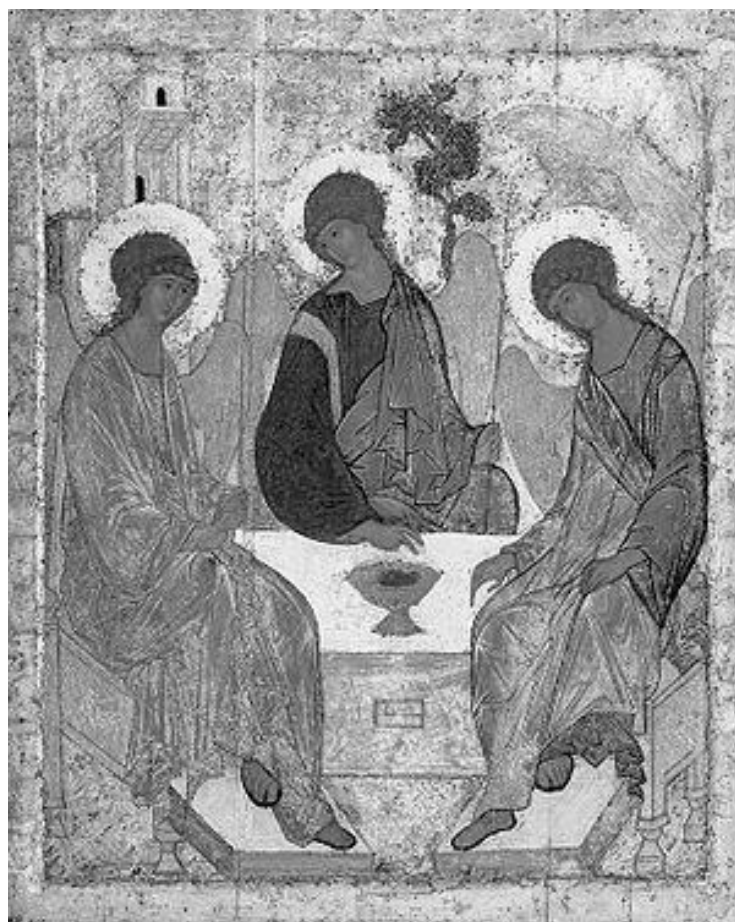


Рис.16

На иконе Андрея Рублёва «Троица», XV в. (рис.16) стол и сиденья кресел художник изобразил в обратной перспективе. На двух расположенных ниже византийских мозаиках (рис.17) тоже наблюдаются проявления обратной перспективы.



Рис.17 Мозаики купола баптистерия в Равенне. Конец V в.

Обратную линейную перспективу можно обнаружить и в средневековом искусстве Индии, Китая, Японии, Кореи. На приведённом портрете (уже более позднего времени), столик и расположенные на нём предметы изображены в лёгкой обратной перспективе (рис.18). Кстати, такой способ изображения характерен и для детского рисунка.



Рис.18 Ким Хон До. Автопортрет. XVIII в.

Удивительно, что художники выбирают именно такой способ передачи протяжённых предметов, поскольку в обычных условиях человеческий глаз воспринимает изображение скорее в прямой, а не в обратной перспективе.

Феномен обратной перспективы исследовался многими специалистами. Критики-искусствоведы склонны были поначалу считать этот факт проявлением неумения художника изображать мир таким, каким видит его наблюдатель. Некоторые (например, Н.А.Рынин) прямо говорят об обратной перспективе, как об «ошибочном приёме». Однако этим способом пользуются и многие выдающиеся мастера. В начале XX в. известный русский философ и религиозный мыслитель Павел Флоренский по этому поводу писал: "Принадлежность икон с сильным нарушением правил перспективы именно высоким мастерам... побуждает обдумать, *не наивно ли самое суждение о наивности икон*".

Результаты размышлений деятелей науки и искусства привели к пониманию причин появления обратной перспективы, среди которых выделяются две главные. Первая причина заключается в особенностях сюжетов иконописных работ. Иконы и фрески – предметы религиозного культа. Средневековый мастер изображал на иконах иной, ирреальный мир, а потому вместо естественной перспективы вводил искусственную – обратную перспективу. В этом смысле обратная перспектива образует целостное пространство символов, ориентированное на зрителя и предполагающее его духовную связь с миром символических образов. Исследователи-искусствоведы говорят также и о сознательном желании художника «втянуть» зрителя в центр изображённых событий, дать ему ощутить эффект присутствия. Вторая причина кроется в особенностях человеческого видения. Картина внешнего мира появляется у человека в результате совместной работы *глаза и мозга*. Сначала образуется изображение внешнего пространства на сетчатке глаза, примерно так же, как на фотопленке, то есть по правилам прямой перспективы. Затем на этой основе человеческое сознание воссоздает облик внешнего пространства. Преобразующая работа мозга такова, что предметы ближнего плана видятся человеком в лёгкой обратной перспективе. Похоже, что художники действительно передают ближнее пространство таким, каким они его *видят*. Известный ученый,

академик Б.В.Раушенбах, многие годы занимающийся проблемами пространственных построений в живописи, утверждает, что прямые опыты убеждают в возможности такого видения реальных объектов.

По целому ряду причин, которые очень подробно рассматриваются в трудах Б.В.Раушенбаха, художник, желающий передать на плоскости картины *своё зрительное восприятие* неискаженным, должен будет использовать не линейную перспективу, описанную выше, а **перцептивную перспективу** (от лат. *perception* – восприятие, непосредственное отражение объективной действительности органами чувств). Отражение реального пространства в сознании человека в результате совместной работы глаза и мозга принято называть **перцептивным пространством**. Это пространство отличается от реального. Действительно, в реальном пространстве рельсы не пересекаются, а в перцептивном пространстве сходятся в одной точке на горизонте. Точно так же, реальные предметы по мере удаления от наблюдателя уменьшаются в размерах и превращаются в точку на горизонте. **Перцептивная перспектива** – изображение перцептивного пространства на плоскости картины.

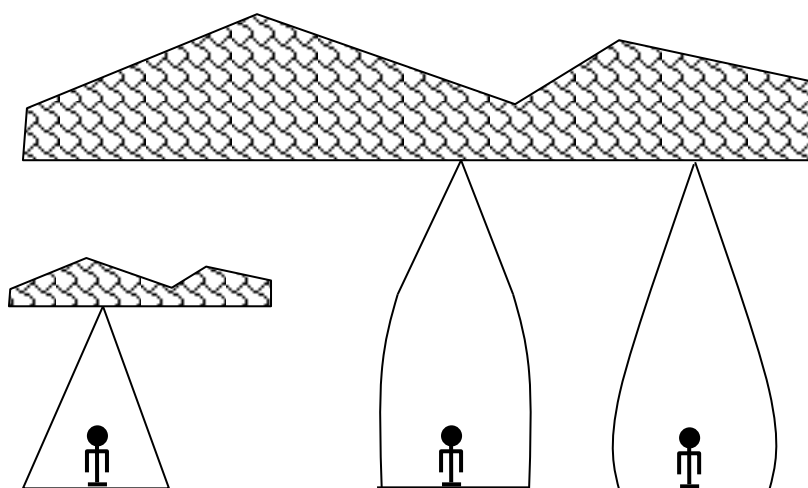


Рис.19

Рис.20

Сравним воздействия линейной и перцептивной перспектив на одном примере, приведённом академиком Б.В.Раушенбахом – изображении дороги и гор в обеих системах перспектив (рис.19, 20).

Все изображения даны в одном масштабе, поэтому хорошо видно, что перцептивная перспектива (рис.20) отличается от линейной (рис.19) повышенным горизонтом и увеличенными размерами дальних предметов – гор. Нетрудно видеть, что при изображении дальних областей – участков дорог, примыкающих к горам – перцептивная перспектива практически не отличается от линейной. Однако, участки дорог, примыкающие к основанию картины, изображаются по-разному. В линейной перспективе прямолинейные края дороги сходятся на горизонте, а в перцептивной перспективе на ближнем плане параллельны или даже слегка расходятся, испытывая воздействие обратной перспективы. И это является результатом абсолютно точного следования закономерностям естественного зрительного восприятия.

Этот эффект приводит к тому, что в перцептивной перспективе возникает необходимость изображения прямых, параллельных в действительности, прямыми, параллельными в плоскости картины. И тогда вступает в действие ещё один метод изображения предметов видимого реального пространства – **параллельное проектирование**, точнее, его разновидность – **аксонометрия** (параллельное проектирование предмета на плоскость вместе с привязанной к нему пространственной системой координат, при этом направление проектирования не параллельно ни одной из координатных осей). Этот метод обеспечивает фиксированное искажение размеров в каждом из трёх направлений (длина, ширина, высота) и, следовательно, сохранение параллельности прямых и сохранение отношения длин параллельных отрезков.

Можно дать определение параллельного проектирования по аналогии с центральным, но можно представлять его себе и как центральное проектирование (!) в случае, когда центр проектирования (точка зрения) бесконечно удален от картинной плоскости. В этом случае проектирующие лучи становятся параллельными и вместо проектирующего конуса появляется проектирующий цилиндр. В школьных учебниках по геометрии

геометрические фигуры (многогранники, круглые тела и пр.) изображаются исключительно в параллельной проекции, именно потому, что такое изображение является наиболее наглядным и сохраняющим привычные свойства фигур. На рис.21 даны примеры изображения куба, цилиндра и трёх параллельных плоскостей в параллельной проекции.

Осталось добавить только, что на картинной плоскости при параллельном проектировании идеально передаётся облик небольших объектов и неглубокого ближнего плана – близких областей пространства (или, напротив, очень далёких).

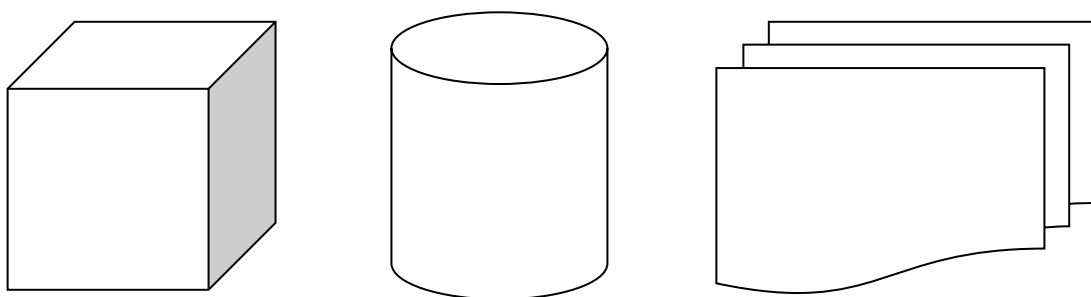


Рис.21

Приведем ещё два примера.



Рис. 22

В картине В. Бедного «Беление холстов», 1967 г. (рис.22) можно наблюдать перцептивную перспективу, а в произведении К. Хокусая «Водяная мельница в Ондене», 1823-31 гг. (рис.23) ярко выраженная аксонометрия – в картине отчетливо видны три направления осей координат.

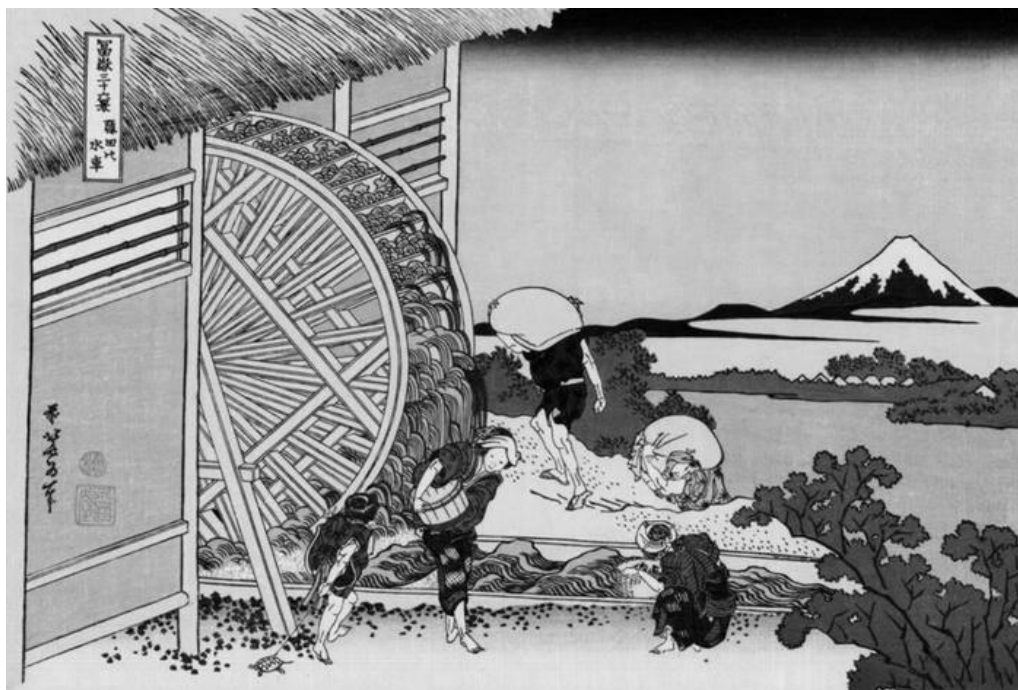


Рис.23

Следуя своим творческим задачам, художник волен выбирать для своей работы любую систему перспективы или даже использовать несколько систем, изображая разные участки картины, или вовсе отказаться от какой-либо перспективы, создать шедевр (в кавычках или без), над которым зрители и искусствоведы будут ломать головы, пытаясь угадать, что руководило художником, когда он обдумывал замысел картины, и что он пытался передать человечеству.

Подводя итог и перефразируя известную пословицу, отметим, что «не геометрией единой жив художник», потому что для передачи глубины пространства и объёмности предметов у художника, кроме геометрической, есть и другие виды перспектив. На самом деле художник достигает своей цели посредством трёх перспектив: уменьшением изображений тел, уменьшением их отчётливости и ослаблением их цвета. И если первая носит

геометрический характер, то две последние произведены воздухом, который находится между глазом и видимыми этим глазом предметами.

Воздушная перспектива – характеризуется исчезновением чёткости и ясности очертаний предметов по мере их удаления от глаз наблюдателя. При этом дальний план характеризуется уменьшением насыщенности цвета (цвет теряет свою яркость, контрасты светотени смягчаются), таким образом, глубина кажется более светлой, чем передний план (рис.24).



Рис.24



Рис.25

Воздушная перспектива связана с изменением тонов, потому она может называться также и **тональной перспективой**. Первые исследования закономерностей воздушной перспективы встречаются ещё у Леонардо да Винчи. «Вещи на расстоянии,— писал он, — кажутся тебе двусмысленными и сомнительными; делай и ты их с такой же расплывчатостью, иначе они в

твоей картине покажутся на одинаковом расстоянии... не ограничивай вещи, отдалённые от глаза, ибо на расстоянии не только эти границы, но и части тел неощутимы». Великий художник отмечал, что отдаление предмета от глаза наблюдателя связано и с изменением цвета предмета. Поэтому для передачи глубины пространства в картине ближайшие предметы должны быть изображены художником в их собственных цветах, удалённые приобретают синеватый оттенок, «...а самые последние предметы, в нём видимые, как например, горы, вследствие большого количества воздуха, находящегося между твоим глазом и горою, кажутся синими, почти цвета воздуха...» (рис.25).

Воздушная перспектива зависит от влажности и запылённости воздуха и ярко выражена во время тумана, на рассвете над водоёмом, в пустыне или степи во время ветреной погоды, когда поднимается пыль.

Рекомендации по использованию теоретического материала

После знакомства учащихся с различными системами перспектив и примерами перспективных отображений в картинах различных авторов, можно организовать:

- работу по одной выбранной картине, в которой художник применяет несколько перспектив;
- работу по заранее подготовленной подборке картин, которые можно скачать из интернета;
- экскурсию в музей изобразительных искусств;
- самостоятельную работу школьников (с использованием интернета, репродукций, книг по искусству и т.д.) по подборке материала, иллюстрирующего системы перспектив в живописи. При этом можно ориентироваться на отдельно выбранного художника, на художников отдельно выбранной страны, на определенный период развития искусства и тому подобное.

При этом необходимо заранее раздать учащимся (и экскурсоводу) примерный перечень вопросов, на которые требуется получить ответы. Свои ответы учащиеся могут целиком или выборочно оформить в виде эссе. Кстати, этот материал может быть темой научно-практического исследования школьников в старших классах.

Приведем ориентировочный перечень вопросов.

1. Какие системы перспектив использовал художник в выбранной картине?
2. На картине (автор, название), написанной в прямой линейной перспективе, определите, сколько точек схода использовал художник и сколько линий горизонта.
3. Подберите картины, в которых использована обратная перспектива.
4. Есть ли среди увиденных вами картин такие, в которых встречается перцептивная перспектива?
5. Как проявляется аксонометрия в картине (автор, название) ?
6. Какую систему перспективы чаще всего применяют художники (школа, страна, эпоха)?
7. В картинах какого жанра чаще всего применяется прямая перспектива (обратная, перцептивная, аксонометрия)?
8. Назовите картины, которые написаны без использования перспективы. Что можно сказать об их жанре?

Литература

1. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. // Учеб. пособ. для пед ин-тов. – ч.2. – М. : Просвещение, 1987. – 352 с.
2. Борисова Е.А. Из истории русского искусства второй половины XIX - начала XX века. – М. : 1978.
3. Власов В.Г. Стили в искусстве. – СПб. : 1995.
4. Зотов А.И. Русское искусство с древнейших времён до начала XX века. – М. : 1979.

5. Мартин Б. Рисуем с удовольствием. – Мн. : ООО Попурри, 2003. – 144 с.
6. Раушенбах Б.В. Пространственные построения в древнерусской живописи. – М. : Наука, 1975. – 184 с.
7. Раушенбах Б.В. Системы перспективы в изобразительном искусстве. Общая теория перспективы. – М. : Наука, 1986. – 255 с.
8. Сонин А.С. Постигание совершенства: (Симметрия, асимметрия дисимметрия, антисимметрия). – М. : Знание, 1987. – 208 с.
9. Щербаков Р.Н., Пичурин Л.Ф. От проективной геометрии к неевклидовой // Книга для внекл. чтения 9-10 кл. – М. : Просвещение, 1979. – 158 с.
10. Статьи из Википедии – свободной энциклопедии.

Математика и архитектура

Симметрия и асимметрия в архитектуре

«Симметрия... является той идеей, посредством которой человек на протяжении веков пытался постичь и создать порядок, красоту и совершенство».
Герман Вейль

Симмétrия (от греческого *συμμετρία* – соразмерность) означает пропорциональность, сбалансированность, строгую правильность в расположении, размещении чего-либо.

Асимметр́ией называют нарушение симметрии или отсутствие её.

С одной стороны, симметрия – основа способа согласования многих частей, с помощью которого они объединяются в целое. Другой смысл этого слова – равновесие. Ещё Аристотель говорил о симметрии как о таком состоянии, которое характеризуется соотношением крайностей. Из этого высказывания следует, что Аристотель, пожалуй, был ближе всех к открытию одной из самых фундаментальных закономерностей Природы – её двойственности.

Пристальное внимание уделяли симметрии Пифагор и его ученики. Исходя из учения о числе, пифагорейцы дали первую математическую трактовку гармонии, симметрии, которая не потеряла своего значения и в наши дни. Взгляды Пифагора и его школы получили дальнейшее развитие в платоновском учении о познании. Особый интерес представляют взгляды Платона на строение мира, который, по его утверждению, состоит из правильных многоугольников, обладающих идеальной симметрией. Для Платона характерно соединение учения об идеях с пифагорейским учением о числе. Среди более поздних естествоиспытателей и философов, занимавшихся разработкой категории симметрии, следует назвать Рене Декарта и Герберта Спенсера. Так, по Декарту, бог, создав асимметричные тела, придал им "естественное" круговое движение, в результате которого они совершенствовались в тела симметричные.

У симметрии особая роль в истории зодчества. Она присутствует в сооружениях всех архитектурных школ и как композиционная постоянная перешагивает границы государств, помогая обнаружить черты общности в постройках, разделённых пространством и временем. Она, как символ особой преемственности в профессии, как своеобразная нить Ариадны, помогает выбраться из лабиринтов наследия к калейдоскопу сегодняшних противоречивых тенденций в мировой архитектуре и включить их через исторически объективное постоянство профессиональных предпочтений в русло истории. Однако, бывали периоды, когда одним из признаков стиля становилась асимметрия, хотя симметричные фрагменты и детали присутствовали всегда.

В признанных произведениях современной архитектуры, как правило, встречается скрытая неявная симметрия: динамика поворотной симметрии, классическая зеркальная, переносная, центрально-осевая.

Немецкий математик Герман Вейль (1885-1955), стоящий у истоков сегодняшних тенденций изучения симметрии, говорит, что «симметрия – в широком и узком смысле, в зависимости от того, как вы определите значение этого понятия, является той идеей, посредством которой человек на протяжении веков пытался постичь и создать порядок, красоту и совершенство».

Привычное *геометрическое* представление об архитектурной симметрии вошло в профессиональное сознание совсем недавно и связано с развитием кристаллографии. Именно кристаллографическая симметрия утвердилась в архитектуре в своем прикладном значении вариантных и структурно-морфологических преобразований. В традициях «картезианской» чистоты современной архитектуры это значение стало преобладать над овечной романтикой древнейших легенд классической симметрией.

Геометрический аспект симметрии применительно к архитектурной морфологии, в частности, тема пропорций, достаточно подробно раскрыт в работах К. Афанасьева, М. Булатова, Б. Рыбакова, А. Тица, И. Шевелёва и др.

Они продолжают поиски возможностей «поверить алгеброй гармонию», успешно начатые немецкими учёными в конце прошлого века (А. Цейзинг, А. Тирш, Э.Мессель), продолженные англичанами Дж. Хэмбиджем и П. Куком, обобщённые в работе М. Гика и, наконец, подробно разработанные на материале античности Н. Бруновым и В. Владимировым.

Образное « прочтение» темы симметрии в композиции возможно только в традициях культуры, стиля и норм художественного мышления конкретной исторической эпохи.

Рекомендации по использованию теоретического материала

Вариант I. Серия уроков по теме «Симметрия в архитектуре города Екатеринбурга»

Предлагаемая серия уроков предназначена для расширения и систематизации теоретических и практических знаний учащихся 9-10 классов средней школы. С предметной стороны она ориентирована на приобретение учащимися определённого опыта работы с преобразованиями плоскости, в частности движениями, и знакомство с движениями пространства. Важной задачей является также подготовка учащихся к более осмысленному пониманию положений математической теории и знакомство учащихся с возможностями их использования в практической деятельности людей.

Симметрия – наиболее интересный, но и трудный раздел школьного курса. Программа серии уроков рассчитана на 10 часов (по 2 часа в неделю). Материал для занятий подобран таким образом, чтобы можно было не только проиллюстрировать теорию красотой реальных симметричных фигур, но и «просчитать» эту красоту, увидеть общее, особенное, уникальное, подчеркнуть эстетику предмета, показать связь с другими областями знаний.

Программа состоит из трёх частей.

Часть 1 (аудиторная) – введение, которое включает в себя знакомство с видами симметрий и с группой самосовмещений геометрической фигуры.

Часть 2 (выездная) – экскурсия по городу Екатеринбургу.

Часть 3 (аудиторная) – работа в классе, решение практико-ориентированных задач по теме «Симметрия», подведение итогов.

Часть 1. Математический аспект понятия симметрии

С понятием преобразования плоскости и пространства человек встречается ещё в школе в младших классах, рассматривая симметричные фигуры: квадраты, круги, кубы, шары, а также предметы реального мира: машины, бабочки, снежинки и прочее. Таким образом, понятие симметрии является первым свойством фигур, привлекающим внимание ребёнка.

Если говорить о симметрии пространственных объектов, то можно выделить различные её виды: центральная, осевая, поворотная, зеркальная, переносная. Каждый из этих видов может быть описан математически и включен в состав группы преобразований пространственных объектов. Не всегда математическое понятие совпадает с принятым в искусстве, поэтому в разных источниках мы можем встретить разные названия одного и того же вида симметрии. Даже само понятие «симметрия» имеет несколько различных толкований: симметрия как гармония пропорций, симметрия как частный случай преобразования пространства, симметрия как элемент группы самосовмещений геометрической фигуры.

Преобразования пространства, сохраняющие расстояния между любыми двумя точками и, следовательно, переводящие любую фигуру в равную ей фигуру, называются движениями (или перемещениями) пространства.

Существует классификация всех движений пространства.

Если пространство двумерно (является плоскостью), то любое его движение будет движением одного из четырех видов:

- 1) ***параллельный перенос***;
- 2) ***поворот вокруг точки*** на угол φ (частный случай поворота – поворот на угол $\varphi = 180^\circ$ является ***центральной симметрией***);
- 3) ***осевая симметрия*** или, иначе говоря, ***отражение от прямой***;

4) **скользящая симметрия** – преобразование плоскости, которое представляет собой композицию осевой симметрии и параллельного переноса вдоль оси симметрии.

Если пространство трёхмерно (является геометрическим пространством реального мира), то каждое движение этого пространства относится уже к одному из шести видов:

- 1) **параллельный перенос**;
- 2) **поворот вокруг прямой** на угол φ (при этом поворот на угол $\varphi = 180^\circ$ является симметрией относительно этой прямой, или просто **осевой симметрией**);
- 3) **винтовое движение** – композиция поворота вокруг прямой и параллельного переноса вдоль этой прямой;
- 4) **отражение от плоскости**, или **симметрия относительно плоскости**, или **зеркальная симметрия**;
- 5) **поворотное отражение** с углом поворота φ – композиция поворота вокруг прямой на угол φ и отражения от перпендикулярной ей плоскости (при этом поворотное отражение с углом $\varphi = 180^\circ$ является **центральной симметрией**, центр которой совпадает с точкой пересечения прямой и плоскости, задающих поворотное отражение);
- 6) **скользящее отражение** – композиция отражения от плоскости и параллельного переноса вдоль этой плоскости.

Для любой фигуры в пространстве произвольной размерности можно рассматривать множество всех движений пространства, которые переводят эту фигуру саму в себя. Такие движения называются **самосовмещениями** фигуры. Все вместе они образуют группу самосовмещений данной фигуры. Эту группу называют ещё **группой симметрий** фигуры, и *каждое* преобразование, отличное от тождественного и принадлежащее этой группе, тоже может называться «симметрией», только с соответствующим определяющим словом.

Если среди параллельных переносов группы самосовмещений содержится перенос на ненулевой вектор наименьшей длины, то говорят, что фигура обладает **переносной**, или **трансляционной симметрией**. Если в группе есть поворот вокруг точки (случай плоскости) или вокруг прямой (случай пространства) на наименьший возможный положительный угол, равный $\frac{2\pi}{n}$, где $n \in \Gamma$ и $n \geq 2$, то говорят, что фигура обладает **поворотной симметрией порядка n** . В трёхмерном пространстве фигура может обладать ещё и **зеркально-поворотной симметрией порядка $2n$** , если фигура переходит в себя при поворотном отражении с наименьшим положительным углом $\frac{2\pi}{2n}$, где $n \in \Gamma$ и $n \geq 2$.

Рассмотрим два характерных примера.

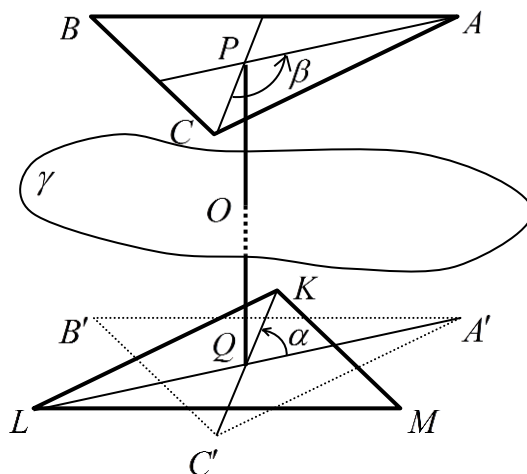


Рис.1

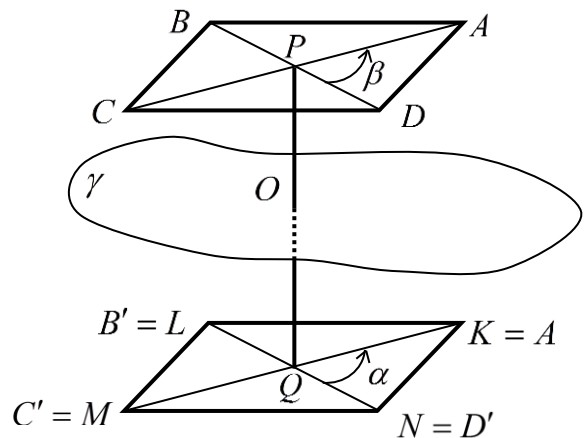


Рис.2

На рис.1 изображена пространственная фигура, состоящая из двух правильных треугольников ABC , KLM и отрезка PQ . На рис.2 – та же фигура, только правильные треугольники заменены квадратами $ABCD$ и $KLMN$.

Обе фигуры переходят сами в себя при повороте вокруг прямой PQ на угол β . Тот же результат получится, если отразить их сначала от плоскости γ , а потом повернуть вокруг прямой PQ на угол α , то есть применить поворотное отражение на угол α .

Для фигуры с треугольниками наименьший угол поворота $\beta = \frac{2\pi}{3}$, поэтому она обладает поворотной симметрией третьего порядка, а наименьшая величина угла $\alpha = \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{6}$, поэтому фигура обладает ещё и зеркально-поворотной симметрией шестого порядка. Фигура, содержащая квадраты вместо треугольников, обладает обоими видами симметрий, только порядок у них один – четвёртый.

Если в любой из фигур нижний многоугольник заменить на одну единственную точку Q , то полученной фигуре будет присуща только поворотная симметрия.

В связи со строением группы самосовмещений фигуры рассматриваются *элементы симметрии* этой фигуры. Это – её центры симметрии, плоскости симметрии, оси симметрии и зеркально-поворотные оси симметрии. Так, рассмотренная выше фигура с треугольниками имеет один центр симметрии (точка O), три плоскости симметрии (APQ, BPQ, CPQ), одну ось симметрии третьего порядка (прямая PQ), одну зеркально-поворотную ось шестого порядка (снова прямая PQ). Элементы симметрии фигуры с квадратами немного отличаются от подобных элементов первой фигуры. Отличие состоит в том, что вторая фигура имеет пять плоскостей симметрии (включая ещё и γ) и порядок её осей симметрии равен четырём.

Интересно, что строение группы самосовмещений фигуры, подчиняясь математическим законам, не допускает слишком большого разнообразия. Доказано, например, что количество различных типов групп самосовмещений линейных орнаментов, или бордюров равно 7, плоских орнаментов – 17, а пространственных орнаментов (кристаллических решёток) – 230.

Классификация линейных и плоских орнаментов, в отличие от кристаллических решёток, не слишком сложная задача. Её решение доступно пониманию учащихся старших классов. Вывод же всех 230

пространственных групп – задача существенно более сложная. Она была решена в 1890-1891 гг. русским кристаллографом Е. С. Фёдоровым и, независимо от него, немецким математиком А. Шёнфлисом. Сейчас эти группы называются фёдоровскими группами. Пространственные группы исключительно важны в изучении атомного строения кристаллов. Они дают один из возможных законов симметрии взаимного расположения атомов в кристаллической решётке и *любая* (!) из многих тысяч исследованных природных структур обязательно принадлежит к какой-либо одной из 230 пространственных групп.

Рассмотрим на трёх примерах строение группы самосовмещений (симметрий) геометрической фигуры.

Пример 1. Правильный пятиугольник (рис.3).⁵

Заметим сразу, что правильный пятиугольник имеет центр O (это центр описанной около него окружности), но не имеет центра симметрии. Кроме того, пятиугольник – *ограниченная фигура* (целиком помещается внутри некоторого круга), следовательно,

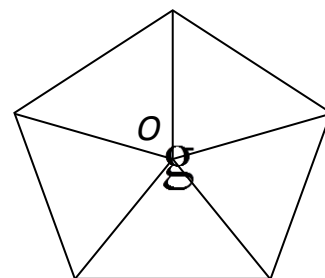


Рис.3

его группа самосовмещений не может содержать ни параллельных переносов, ни скользящих симметрий. Таким образом, группа симметрий правильного пятиугольника состоит только из двух видов движений:

1) пять различных осевых симметрий (каждая ось проходит через вершину пятиугольника и середину противоположной стороны);

2) пять поворотов вокруг точки O на углы $\frac{360^\circ}{n} \cdot k$, где $n=5$, $k=1,2,3,4,5$.

Иначе говоря, правильный пятиугольник обладает поворотной симметрией пятого порядка и пятью зеркальными симметриями.

⁵ Таковую форму имеет, например, Пентагон – здание Министерства обороны США.

Примечание. Группа самосовмещений любой геометрической фигуры обязательно содержит **тождественное преобразование** – преобразование, которое каждую точку фигуры оставляет на месте. Бывает, что это единственное преобразование, которое совмещает фигуру саму с собой (как например, в случае разностороннего треугольника). Часто тождественное преобразование является частным случаем другого движения из группы. В рассмотренном примере – это поворот на угол 360° (при $k = 5$).

Пример 2. Линейный орнамент (бордюр) (рис.4).

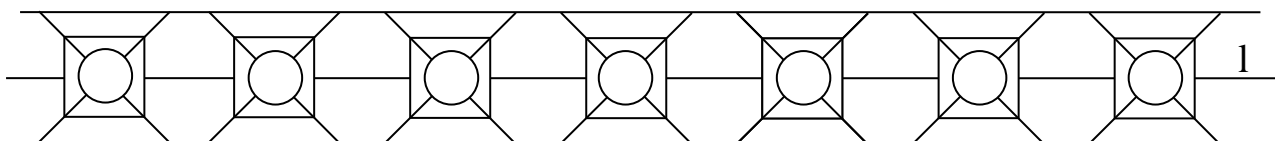


Рис.4

По определению **линейного орнамента**, в его группе самосовмещений присутствуют параллельные переносы на векторы только одного направления и среди них есть вектор наименьшей длины \vec{a} . Поскольку линейный орнамент – фигура неограниченная, то выделим мысленно на рисунке только две рядом находящиеся окружности и их центры обозначим O_1 и O_2 , а середину отрезка между ними – буквой M . Кроме этого, у линейного орнамента есть центральная линия 1 – средняя линия полосы, границы которой проходят по верхнему и нижнему краю орнамента.

Заданный бордюр имеет максимально насыщенную группу самосовмещений. Элементами группы являются:

1) параллельные переносы: на вектор $\vec{a} = \overrightarrow{O_1 O_2}$ и на каждый из векторов вида $n\vec{a}$, где $n \in \mathbb{Z}$;

2) центральные симметрии: с центром O_1 , с центром O_2 и всеми другими центрами, являющимися центрами окружностей бордюра;

3) центральные симметрии: с центром M и всеми другими центрами, лежащими ровно посередине между центрами окружностей бордюра;

- 4) отражение от оси 1 (так называемое продольное отражение);
- 5) отражения от прямых, перпендикулярных 1 и проходящих: через точку O_1 , через точку O_2 , через точку M и все другие подобные им точки (так называемые поперечные отражения);

- 6) скользящие симметрии с осью 1 и векторами вида $n\vec{a}$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Таким образом, представленный бордюр обладает переносной симметрией, поворотной симметрией второго порядка, зеркальной симметрией и продольным скользящим отражением.

Пример 3. Правильный гексаэдр, или, как все его называют, куб (рис.5).

Определим элементы симметрии куба и те самосовмещения куба, которые им отвечают.

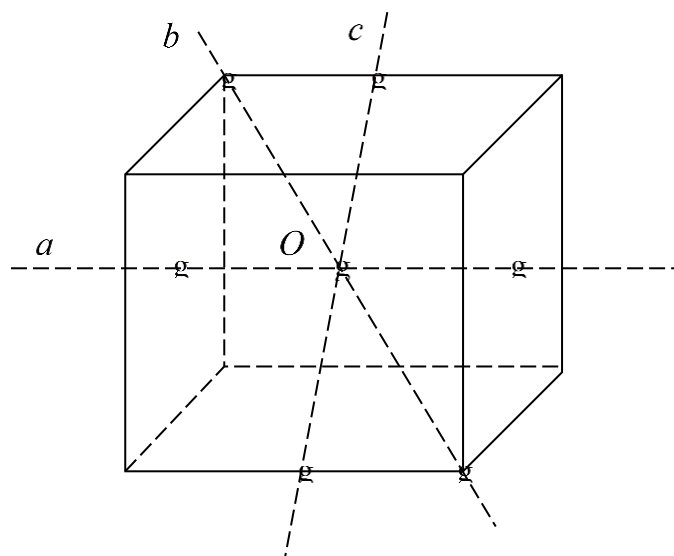


Рис.5

Представим результаты в виде таблицы, где во второй колонке никакие два движения не являются равными преобразованиями (если при перечислении симметрий во второй колонке встречались два равных преобразования, то одно из них исключалось из списка).

Элементы симметрии куба	Симметрии в группе самосовмещений куба
1 центр симметрии – точка O	1 центральная симметрия
9 плоскостей симметрии , проходящих: через противоположные рёбра куба (6); через центр куба параллельно грани (3)	9 отражений от плоскостей
13 осей симметрии: 3 оси 4-го порядка – прямая a и ей подобные; 4 оси 6-го порядка – прямая b и ей подобные; 6 осей 2-го порядка – прямая c и ей подобные	9 поворотов вокруг прямых типа a на углы $\pi/2$; π ; $3\pi/2$; 8 поворотов вокруг прямых типа b на углы $2\pi/3$; $4\pi/3$; 6 осевых симметрий с осями типа c
7 зеркально-поворотных осей: 3 оси 4-го порядка – прямая a и ей подобные; 4 оси 6-го порядка – прямая b и ей подобные	6 поворотных отражений с углами $\pi/2$; $3\pi/2$ вокруг прямых типа a 8 поворотных отражений с углами $\pi/3$; $5\pi/3$ вокруг прямых типа b

Подсчитав во второй колонке количество всех полученных движений, входящих в группу самосовмещений куба, и добавив к ним тождественное преобразование, даём ответ: в группе самосовмещений куба содержится 48 преобразований симметрии; все они подробно описаны в таблице и других симметрий нет.

Часть 2. Экскурсия по городу Екатеринбург

Иллюстрацией к описанию различных видов симметрий могут служить архитектурные объекты любого города. Элементы симметрии и отдельные виды симметрий можно встретить в любом архитектурном сооружении. Они могут характеризовать и строение в целом, и отдельные его фрагменты, и элементы его декора. При этом понятно, что ни одно здание не может обладать переносной симметрией, однако, удобно считать, что таковая имеется, понимая под этим наличие многократного повторения одних и тех же деталей, полученных из одной исходной с помощью параллельных переносов вида $n\vec{a}$, где $\vec{a} \neq \vec{0}$. В этом случае говорят о переносной симметрии n -го порядка. То же касается и скользящей симметрии.

Предлагаем совершить путешествие по городу Екатеринбургу, внимательно всматриваясь в его здания.⁶

У каждого города, как и у человека, свой характер, своё лицо, и этот внешний вид, образ формируется и дополняется годами и даже тысячелетиями. Архитектура любого города – это его летопись, где каждая страница фиксирует определённый этап в его жизни, и такая летопись продолжает создаваться каждый день.

Люди в наших местах селились издавна и две, и три, и десять тысяч лет тому назад. Древние спокойные горы, щедро дававшие человеку металл и камень, богатые зверем леса, луга, полноводные реки – всё это делало наш край привлекательным для людей, осваивавшихся здесь задолго до приезда В. Н. Татищева, однако, именно ему мы обязаны тем, что сегодня на карте России есть этот город. Екатеринбург, родившись как промышленный центр Урало-Сибирского региона, за три века нашей истории стал ещё и центром научной, образовательной и культурной мысли России. Екатеринбург – город, который поразительно преобразается год от года, он подобен точным часам, фиксирующим все приметы нового времени и поэтому Екатеринбург – город молодой, ведь стремительное развитие является признаком молодости.

Знакомство с Екатеринбургом лучше всего начинать с «Плотинки», так ласково называют жители города исторический сквер, то место, с которого начинался город. Плотина была заложена в 1723 году усилиями двух выдающихся людей того времени – Василия Никитича Татищева и Георга Вильгельма де Геннина (Вилима Ивановича). Плотина дала механическую энергию для приведения в действие механизмов только что основанного Екатеринбургского завода и послужила началом строительства города. Плотина в основе своей построена из стволов лиственницы и гранита. В результате сооружения плотины на реке Исеть образовался пруд, называющийся сейчас Городским прудом Екатеринбурга.

⁶ Для удобства читателя в конце раздела «Математика и архитектура» помещён глоссарий архитектурных терминов.

На правом берегу Исети между «Плотинкой» и Площадью 1905 года, бывшей Кафедральной, проходит улица 8 Марта, старейшая улица Екатеринбурга. Тон площади задаёт здание Городской администрации (рис.6).

Это здание и его башня с часами-курантами всегда были символом официального Екатеринбурга. В этом здании получают своё выражение несколько видов симметрий, относящихся как к зданию в целом, так и к отдельным его фрагментам. Здесь есть зеркальная, переносная, поворотная, центральная и осевая симметрии.



Рис.6

В 1998 году на левом берегу Исети, на месте первого в Екатеринбурге Храма Святой Екатерины в соответствии с постановлением главы города была возведена часовня Святой Великомученицы Екатерины (покровительницы нашего города и горного дела) (рис.7).

Удивительно, но с точки зрения наличия элементов симметрии часовня ещё более многолика, чем здание Городского совета. Обращают на себя внимание угловые башни с мозаичными орнаментами. Часовню опоясывает бордюр, визуальнo разделяя её на два яруса. Верхний ярус обладает поворотной симметрией восьмого порядка. Над центральным арочным ризалитом размещены с обеих сторон мозаичные панно святых.



Рис.7

Продвигаясь дальше, мы попадаем на улицу Пушкина (бывшая Соборная, позже Пушкинская), расположенную между улицами Малышева и Первомайской. Свое название она получила в 1899 году в честь 100-летия со дня рождения А. С. Пушкина. Это одна из красивейших улиц Екатеринбурга с сохранившимися старыми зданиями. Здесь располагались дома Флоринского и Ятеса, филиал Санкт-Петербургского ломбарда, ресторан “Россия”, гостиница “Славянская”, фирма и магазин “Сименс и Гальске”, магазин техники и приборов Шварте, две аптеки, представительство Всеобщей компании электричества. Улица переходила в Нуровский сквер. Ныне в бывшем Нуровском сквере установлена скульптура изобретателя радио А. С. Попова. Дом под номером 27 принадлежал Д. Н. Мамину-Сибиряку, сейчас там Музей писателя. На современной улице Пушкина располагаются Дом работников культуры и 2-й дом профсоюзов, а также сохранившиеся здания XIX – начала XX веков. Улица Пушкина, 1. Трёхэтажное здание лечебницы врачей-специалистов (сейчас стоматологическая клиника), поставленное на скрещении улиц Малышева и Пушкина. Сооружение постройки 1910 года, архитектор И. К. Янковский (рис.8).



Рис.8

Здание имело угловой акцент с ризалитом. Одна из особенностей фасадной композиции – группировка окон (больших, плавно очерченных, арочных и прямоугольных). В композиции привлечены традиционные элементы: лопатки, пилястры, лепной орнаментальный декор, все эти элементы обладают переносной симметрией.

Улица Пушкина, 4. Доходный дом Уварова с магазином и конторами. Дом представляет собой образец модерна с композицией главного фасада в линейных геометрических формах декора.

Улица Пушкина, 7. Главной постройкой усадьбы стал каменный корпус биржевой гостиницы «Эрмитаж» (1886), принадлежавшей чиновнику Черепанову. Дом до сих пор привлекает к себе внимание декоративным уличным фасадом, в котором архитектор свободно смешал детали разных стилей: стрельчатые окна, пилястры в простенках между ними, барочный лепной орнамент – ярко выражена переносная симметрия. Фасад здания обладает зеркальной симметрией.

Улица Пушкина, 16. Здесь находится дом, известный как здание аптеки Вейерсберга. Не совсем справедливое название, так как то строение, которое мы наблюдаем сейчас – это уже серьёзно перестроенный вариант разрозненных усадебных построек Вейерсберга. В начале XIX века на этом месте стоял типичный для классицизма каменный дом с мезонином, в котором и работала аптека жены владельца – Амалии Вейерсберг. В 1900-е

годы произошла кардинальная перестройка, которая объединила несколько домов усадьбы. И перед нами уже продукт новой эпохи – праздничное, двухэтажное каменное здание в стиле модерн.

Фасад аптеки с одной стороны типичен для модерна, с другой уникален. Особенно уникален египетский мотив стилизованных цветов лотоса с длинным стеблем. Изгибы чашечек и стеблей плавно охватывают арочные и прямоугольные окна, составляя форму наличников, присутствуют также элементы скульптурных женских голов, композиционно связанные с линейным рельефом на лопатках и в одном из фронтонов главного фасада, обладающего центрально-осевой симметрией.

Проспект Ленина, 37. Аптека Горного управления на Екатерининской площади (ныне площадь Труда). Архитектор М. П. Малахов построил её в 1821 году в стиле классицизма (рис.9).



Рис.9

Вход был размещён по главной оси фасада. Увеличение участка позволило повторить ворота с оградой, создав также и слева от дома симметричную композицию. В центре фасада здания размещены триумфальные арки, фронтоны под мезонином, тройные окна по сторонам ворот, обладающие зеркальной симметрией и арочная ограда. Пропорции здания соответствуют чётким геометрическим построениям. Несмотря на позднейшие переделки, комплекс сохранил типичный для времени постройки

облик городской усадьбы эпохи классицизма. Сейчас в здании располагается Музей истории камнерезного и ювелирного искусства. Ныне здание музея является памятником архитектуры федерального значения.

Проходя по улице Свердлова, мы попадаем на Вознесенскую горку, одно из самых интересных, загадочных и богатых легендами мест Екатеринбурга. Здесь в первой половине XVIII века практически одновременно со строительством завода была построена дача Татищева. После отъезда Татищева, дача сгорела, но уже спустя несколько лет жителями Мельковской слободы на этом месте был заложен храм (рис.10).



Рис.10

Вознесенский храм, одно из четырех архитектурных сооружений, сохранившихся в Екатеринбурге с XVIII века. Сегодня Вознесенский храм, построенный в стиле барокко, старейший из сохранившихся в Екатеринбурге. Купола этой церкви обладают симметрией 8-го порядка.

Рядом с храмом Вознесения с правой стороны расположен дом-дворец Расторгуева (рис.11) – монументальное и вместе с тем необыкновенно живописное сооружение, поражающее разнообразием композиционных приёмов, изобразительностью в решении фасадов, торжественностью и одновременно прихотливостью форм, широким использованием элементов классицизма и полным пренебрежением его нормативностью.



Рис.11

Дом поставлен на самой высокой (в границах Екатеринбурга того времени) точке, на углу П-образной, открытой в сторону пруда площади перед Вознесенской церковью. Из окон дома был виден весь город, а сам особняк, как и церковь, доминировал над окружающим пространством и был виден отовсюду. Южный фасад, обращенный на площадь, и северный, выходящий во двор, обладает переносной симметрией в виде шестиколонных коринфских портиков, фронтоны которых завершает мезонин, объединяющий фасады и определяющий ширину портиков. Но сами портики резко различаются своим характером и принципом построения. Южный кажется более узким и стройным, благодаря единому ритму колонн, поставленных на аркаду, неожиданную по своим пропорциям и формам пилонов.

Стройности и праздничности южного портика противостоит торжественность и массивность северного. То же количество колонн создаёт

иной, более официальный и вместе с тем отвечающий нормам образ. Колонны стоят свободнее за счет установки по краям портика спаренных колонн, обладающих зеркальной симметрией, которые образуют вместо пяти пролётов три. Та же симметрия повторяется и в поддерживающей портик аркаде с пилонами, расширенными под угловыми колоннами. Сами пилоны – обычные, не двухъярусные. Главенствующая роль северного фасада подчеркнута торжественной, во всю ширину портика, лестницей. Только лоджия в глубине портика придавала дворцовому фасаду более интимный характер. Парадности дворцового фасада присуща центрально-осевая симметрия. Боковые портики – западный и восточный – тематически переходные, связующие столь различные по своему характеру северный и южный фасады. Эти необычные по строению портики, оправленные скромными мезонинами с небольшими полуциркульными окнами, обладающие переносной симметрией, также связаны со стеной, как и южный портик, но имеют спаренные колонны, подобно северному, где хорошо просматривается зеркальная симметрия. Мощь пьедесталов облегчена полуциркульными нишами, отвечающими ряду окон первого этажа.

К 1815 году заканчивается строительство большого флигеля «под барельефом» с оранжереей, а за ним ещё одного, подобного первому. Флигель рядом с Вознесенской церковью, так называемый церковный (его ядром была домовая церковь), имел с главным домом мало общего. Сходные элементы носят фрагментарный характер. В их числе тройное окно в центре за ложным портиком со спаренными колоннами, в композиции просматривается зеркальная симметрия. Самым примечательным элементом этой постройки является ротонда – завершение домового храма, в которой мы можем наблюдать переносную симметрию десятого порядка. В домовом храме восемь пар колонн, обладающие зеркальной симметрией, несут двухчастный антаблемент, завершающийся ступенчатым аттиком, из которого вырастает полуциркульный купол, обладающий поворотной симметрией 24-го порядка.

Улица Карла Либкнехта, 38а. Здание Филармонии (рис.12) начали возводить ещё до революции, а закончили уже в двадцатые годы, при советской власти.



Рис.12

Поначалу это был деловой клуб, затем театр камерной музыки, а с 1936 года – филармония. Композиция главного фасада представляет собой сочетание различных стилевых форм. Классический (большой) ордер полуколонн с композитными капителями выступает в качестве главного элемента членения. В то же время большие окна между полуколоннами, обладающие переносной симметрией, имеют типичную для модерна форму. К модерну относится и лепной орнамент со скульптурными головками в нишах над окнами, которым так же присуща переносная симметрия четвертого порядка. Элемент модерна – обелиски, приставленные к стене на импостах над полуколоннами. Ко всему прочему композиция включает фигурные барельефы с советской эмблематикой. Фасад здания обладает зеркальной симметрией. Колонны с правой и левой стороны подчинены переносной симметрии четвертого порядка. Спаренные колонны с западной и восточной стороны обладают зеркальной симметрией.

Перекрёсток Карла Либкнехта и проспекта Ленина, по которому мы движемся, раньше горожане называли театральным, здесь находился первый в Екатеринбурге Городской театр (сейчас Кино Макс) (рис.13).



Рис.13

Здание построено в стиле классицизма. На проспект Ленина выходит южный (главный) фасад с ионическим портиком высотой в два этажа. Переносную симметрию можем наблюдать в восьмиколонном портике, состоящем из полуколонн, между которыми находятся выходы из театра. На улицу Карла Либкнехта смотрит восточный (боковой) фасад, также с ионическим портиком с выступающими четырьмя колоннами. На уровне второго этажа, над дверями, расположены высокие полуциркульные окна, такие же окна, только более широкие – по углам здания. Декоративное убранство фасадов также соответствует стилю классицизма: это растительные орнаменты, венки. Само здание скорее асимметрично, но элементы декора: орнаменты, бордюры, пилястры, колонны – симметричны, и преобладает здесь переносная симметрия.

Главная улица Екатеринбурга – это проспект Ленина, а в центре этой улицы находится Оперный театр (рис.14).



Рис.14

Одно из красивейших зданий в городе, построенное в 1912 году, воплотило в себе новые инженерные решения начала XX века. Интересно, что на конкурсе проектов нового театра победил проект архитектора А. В. Семёнова, выполненный в стиле модерн, однако, сам автор не смог лично заниматься строительством. Поэтому сооружение этого здания по его проекту поручили молодому и подающему надежды архитектору К. Т. Бабыкину, который свои первые здания строил в стиле модерн (например, по ул. Вайнера, 11), но к этому времени уже начал отходить от «чистого» модерна и стал всё чаще обращаться к классике. Поэтому в детализации здания проявилась классика. Имеются разные мнения об архитектурно-стилевой принадлежности этого здания, но более правильным было бы отнести его к эклектическому стилю, так как здесь проявились и черты модерна, и классические черты. В фасаде здания можно наблюдать зеркальную и переносную симметрии.

Прямо напротив светлого и праздничного Оперного театра находится совсем другое здание – Уральский государственный университет (рис.15), входящий ныне в состав Уральского Федерального университета (УрФУ)

вместе с замыкающим проспект Ленина Техническим университетом (бывший УПИ) (рис.16).



Рис.15



Рис.16

Оба здания выполнены в стиле советского неоклассицизма в 50 годы XX века. В них тоже можно наблюдать осевую, поворотную, переносную симметрии. Каждая колонна вместе с капителями обладает поворотной симметрией четвёртого порядка. Ряд колонн иллюстрирует переносную симметрию, такой же симметрией обладают и ряды окон.

Главная достопримечательность улицы Куйбышева – здание Екатеринбургского цирка (рис.17). В сложном сооружении купола использована поворотная симметрия 16 порядка. Здание по-своему

уникально, с огромным куполом, притом сквозным, открывающим взгляду железобетонные рёбра. Уникален и внутренний купол, он не имеет собственных подпорок и буквально висит на внешнем куполе. В каркасе здания присутствует поворотная симметрия четвёртого порядка и зеркально-поворотная симметрия четвёртого порядка.



Рис. 17

В постройках начала XX века, в первую очередь жилых, композиционные схемы и убранства фасадов, которые представляли собой смешение эклектики и модерна, отличались особой насыщенностью декора и разнообразием форм.

Дом Первушина на углу улиц Радищева и 8 Марта, архитектор П. А. Заруцкий (рис.18). Здание доминирует в пространстве перекрёстка за счёт углового акцента, выявленного крупным эркером с декоративным куполом шестого порядка. Такие же купола с флюгерами венчают ризалиты на уличных фасадах. В композиции прослеживается смешение двух стилей, это выражено в графике оконных переплётов модерна, арочных и прямоугольных. В пользу модерна говорит решение фасадов. Помимо эркеров, ризалитов и куполов эту роль играет декор орнаментов, которые



Рис. 18

весьма разнообразны. Бордюр на втором этаже обладает поворотной симметрией. Угловые античные акротерии в основании купола ризалита перемежаются с растительными архитектурными орнаментами, лепными гирляндами и раковинами. Вертикально развивающиеся линейные рельефы, наложенные на лопатки, также симметричны. Особо показательна орнаментика на фигурных консолях с волютами поддерживающих эркеров. Её рисунок подчеркивает упругую вогнутую форму консоли, а завиток волюты геометризирован.

В нашем городе много интересных, сложных архитектурных сооружений. Пройдите по другим улицам, и вы увидите иной Екатеринбург и на них обязательно найдёте здания, не обладающие никакой симметрией. И получите возможность почувствовать роль симметрии в организации жизненного пространства.

Дополнение

Дополнительный материал лучше использовать для домашнего задания, причём информацию по этой теме учащиеся могут собрать самостоятельно, побывав сами, с друзьями или родителями на станциях Екатеринбургского метрополитена.

Метрополитен Екатеринбурга – один из красивейших в мире. Стоит специально спуститься под землю, чтобы осмотреть эти станции. Интерьер каждой своеобразен.

Станция метро Динамо. Одна из самых глубоких станций Екатеринбургского метрополитена получила своё наименование от названия спорткомплекса Динамо. Эта станция обладает центрально-осевой симметрией, где ось намечена пятью светильниками, напоминающими факелы. Односводчатая станция по проекту архитекторов института Уралгражданпроект А.Заславского и Л.Масленникова раскрывает спортивную тематику. Оригинальная конструкция водоотводящего зонта, являющегося одновременно и элементом архитектурного декора станции, позволила организовать скрытое закарнизное освещение. Оно представляет собой ряд чередующихся в верхней части свода больших проёмов с мягким отражённым светом. В конце платформы, на фоне торцевой стены расположена копия классической скульптуры Дискобол древнегреческого скульптора Мирона, жившего в середине V века до н.э.

Станция метро Уральская. Тема архитектурного оформления станции – сила и мощь Урала. Эта станция тоже обладает центрально-осевой симметрией, эту ось мы можем наблюдать в виде объёмных декоративных люстр из кованого металла, имеющих угловато-факельную форму. Присутствует также и переносная симметрия, выраженная в ряду пилонов и межпилонных проходах и, конечно, в рисунке напольной мозаики.

Станция метро Машиностроителей. Тема архитектурного оформления станции – Машиностроительный завод имени М. И. Калинина: история завода, заслуги перед Родиной в годы войны и в мирное время. Путевые стены имеют сложную отделку: цокольная часть уложена плитами чёрного лабрадорита, по центру пропущена широкая полоса из зелёного змеевика, а верх украсил коелгинский мрамор. Эта станция также симметрична, и главной снова является центрально-осевая симметрия. Роль оси играют «многорукие» люстры-«пауки» из блестящих труб и молочных шаров-плафонов. Если посмотреть на левый перронный зал, то можно заметить также зеркальную симметрию: мы видим 12 колонн, с расстоянием между ними в 4,5 метра и точно такие же колонны высятся в правой части

зала. У станции имеется ещё одна особенность: наклонный тоннель южного вестибюля не примыкает непосредственно к залу станции, а соединён с ним галереей.

Станция метро Уралмаш. Тема архитектурного оформления станции – труд уральских рабочих. Свод станции асимметричен и прорезан параллельными ребрами по диагональным направляющим. По замыслу авторов, это должно напоминать резьбу винта, форму гигантских машин и придавать станции индустриальный колорит. Но в облике этой станции также присутствует и центрально-осевая симметрия, ось симметрии проходит через скамейки и плакатные указатели. В оформлении использовалось чугунное литьё: узорные металлические пластины, мелкие детали и оригинальная фурнитура – всё это применялось для создания барельефов в торцах станции на тему развития тяжёлой промышленности на Урале.

Станция метро Проспект космонавтов. Тема архитектурного оформления станции – космос, звёздное небо, освоение человеком космического пространства. Решение её интерьера построено на сложном сочетании цветоцветовых контрастов. Здесь мы уже наблюдаем зеркальную симметрию: левое, и правое крыло станции отделяют шестнадцать колонн с шагом в шесть метров и центральным пролётом. Осевым ядром станции служит активный ритм круглых кессонов потолка, подсвеченных изнутри люстрами. Их пульсирующий холодный свет отражается в полированной стали колонн и путевых стенах. Выход из платформенного зала в вестибюль, стены и потолки которого ярко освещены, стал как бы переходом от «космической ночи» к «земному дню». В вестибюлях расположены горельефы, изображающие улыбающихся космонавтов.

На другом конце единственной пока в городе ветки екатеринбургского метрополитена **станция метро Площадь 1905 года.** На этой станции также присутствует центрально-осевая симметрия. По продольной оси главного зала станции висят оригинальные люстры из хрусталя и бронзы, прекрасно

сочетающиеся с ритмическим членением свода параллельными складками. Также присутствует и переносная симметрия в виде колонн и бра. Колонны облицованы красным полированным гранитом, они объединены попарно в продольном направлении, что зрительно сокращает протяжённость центрального зала. Путевые стены отделаны белым мрамором и украшены рельефно-художественными композициями в виде крупных картушей бронзового литья и флорентийскими мозаиками, отражающими революционные дни Урала. Платформы освещены светильниками-бра, размещёнными на колоннах. Контрастные световые решения белых сводов и светлой облицовки путевых стен с сочно-красным мрамором порталов и насыщенным тоном полов удачно подчёркивают строго-торжественный стиль центрального зала.

Станция метро Геологическая названа по расположенным неподалёку зданию управления ПО «Уралгеология», горно-геологической академии и геологическому музею. Эта станция обладает зеркальной симметрией, правое крыло в точности повторяет левое. Тема архитектурного оформления станции – богатство уральских недр. На путевых стенах выложены панно, изображающие разрез земной коры. В вестибюле станции установлена памятная доска с перечислением фамилий выдающихся геологов Урала.

Станция метро Чкаловская. Идея оформления – перелёт В. П. Чкалова и его команды через Северный полюс в США. По осевой линии зала в один ряд поставлены 9 зеркальных колонн из нержавеющей стали. Светильники расположены в нишах подвесного декоративного потолка. Пологий свод с большим радиусом подобен крылу самолёта. Путевые стены – тоже с радиусом, напоминают фюзеляж изнутри. 18 мая 2012 на стенах установлены портреты летчиков Героев Советского Союза Валерия Чкалова, Георгия Байдукова и Александра Белякова. В темноватых стенах – ниши для рекламы в стиле иллюминаторов самолета, пол с зеркальным оттенком. Оригинальная идея станции – фонари в полу по линии безопасности, зажигающиеся «бегущей строкой» при приближении поезда. Цветовая гамма – серо-

стальная и голубоватая. На станции присутствуют такие виды симметрий как осевая, трансляционная, зеркальная, поворотная (получающаяся за счет отражения светильников в зеркальных колоннах).

Станция метро Ботаническая. Конструкция станции – трёхпролётная, мелкого заложения, с двумя рядами колонн. В оформлении станции ключевым элементом являются правильные шестиугольники, ассоциирующиеся с пчелиными сотами. Шестиугольники образуют орнамент, в группе самосовмещений которого содержатся все виды симметрий плоскости. Потолок станции в форме сот позволил удачно скрыть внутри них светильники, обеспечил мягкое и тёплое освещение платформенной части. Светлый пол выполнен из керамогранита, колонны облицованы листовым металлом. В ритме колонн угадывается переносная симметрия пространства. В интерьере станции можно наблюдать и зеркальную симметрию.

Часть 3. Комплект заданий по теме «Симметрия»

Задание 1. Определите, какие виды симметрий присутствуют в зданиях на рис. 19, 20, 21, 22, 23. Можете ли вы сказать, где в Екатеринбурге расположены эти здания и каково их предназначение?



Рис.19



Рис.20



Рис.21



Рис.22



Рис.23

Задание 2. Определите, какие элементы в зданиях на рис.24, 25 обладают переносной симметрией:



Рис.24



Рис.25

Задание 3. Определите, какой симметрией и какого порядка обладают купола, изображенные на рисунках 26, 27, 28. Встречали ли вы такие купола на сооружениях Екатеринбурга?

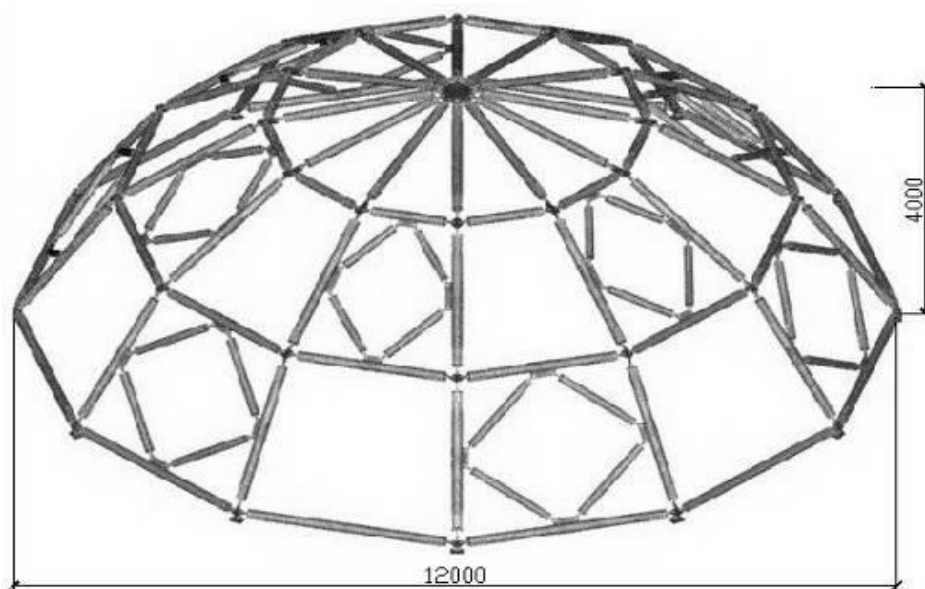


Рис.26



Рис.27



Рис.28

Задание 4. Определите оси симметрии в архитектуре здания вокзала (рис.29):



Рис.29

Задание 5. Помните ли вы волшебные картинки в калейдоскопе, которые менялись от малейшего поворота? Они получены путем отражения в нескольких зеркалах мелких кусочков разноцветного стекла. Калейдоскоп позволит нам прикоснуться к удивительному математическому явлению – симметрии. Какие виды симметрий можно встретить на этих картинках? Какие виды симметрий в калейдоскопе не встречаются?

Задание 6. Побывайте на станциях Екатеринбургского метрополитена и внимательно их осмотрите. Ответьте на следующие вопросы.

1. Какие виды симметрий можно встретить в интерьерах станций и их деталях?
2. Какие виды симметрий можно наблюдать на всех станциях?
3. Имеется ли такой вид симметрии, который присутствует только на одной станции?
4. Имеется ли такой вид симметрии, которого нет ни на одной станции?

Вариант II. Стиль модерн в архитектуре города Екатеринбурга

Часть 1. Характеристика стиля модерн⁷

Модерн – период развития европейского искусства на рубеже XIX-XX веков, главным содержанием которого было стремление художников противопоставить своё творчество искусству второй половины XIX столетия. Хронологические рамки искусства модерна очень узки: приблизительно 1886-1914 годы. Модерн – это не один какой-либо стиль, а множество различных стилей и течений, составляющих период, может быть, не менее важный, чем эпоха Возрождения XVI в. Рубеж XIX-XX веков имел «значение этапа, завершающего грандиозный цикл развития европейской культуры, начавшийся еще в античности. Несомненно то, что предпринятая на рубеже веков попытка обобщения эстетического опыта человечества, синтеза художественных традиций Запада и Востока, античности и средневековья, классицизма и романтизма сопровождалась и, в известной мере, была порождена явлениями упадка, кризиса сложившейся к этому времени системы научных, эстетических и этических ценностей. Однако, несомненно и другое – именно это искусство создало предпосылки, обусловившие радикальные изменения в мировой художественной культуре XX столетия». Период модерна можно сравнить и с эпохой XVII-XVIII вв., конечно не по объёму созданных ценностей, а по логике развития художественных идей. Так же, как и тогда – классицизм, барокко, рококо и снова неоклассицизм, искусство конца XIX в. обобщало опыт всего предыдущего художественного развития.

Если в последующие годы период модерна казался только странным, болезненным и упадочным, то уже через несколько десятилетий, в середине XX в., стало понятно, что именно тогда происходили важные процессы накопления и осмысления новых художественных идей, поиска форм, сближения различных видов и жанров искусства. Художники модерна своей

⁷ Для удобства читателя в конце раздела размещён глоссарий архитектурных терминов.

дерзостью ломали все привычные границы. Их художественное мышление характеризовалось удивительно быстрым ростом. Поэтому, как заметила А. Русакова, немецкое им выражение *«Jahrhunderte wende»* – «поворот столетий» точнее определяет содержание этого переходного периода, чем традиционное французское *«fin du siècle»* – «конец века». Тенденция к синтезу художественных достижений предшествующих веков объясняет также, почему для искусства модерна не существовало какого-либо одного исторического источника, как это случилось, к примеру, с классицизмом, неоготическим, или неорусским стилем. Модерн стремился впитать в себя всё. Но у искусства модерна были свои предтечи. В их числе часто называют У. Морриса, Дж. Рёскина, английских графиков У. Крэйна и У. Блейка.

На искусство модерна возлагались большие надежды. После длительного периода эклектики искали его историко-культурное обоснование. В этом уже было противоречие: с одной стороны – стремление к новаторству, а с другой – оглядка назад. Многие тогда видели в «стиле модерна» некий «венец художественного развития» европейской культуры, единый интернациональный стиль. Волнистые линии орнаментики Ар Нуво (*L'Art Nouveau* – новое искусство) сравнивали с крито-микенским искусством. «Модерн» находили у этрусков, в итальянском маньеризме конца XVI в., в стиле интернациональной или «пламенеющей готики». Модерн сравнивали с рококо, не замечая при этом того художественного разлада, которого не было ни в искусстве древности, ни даже в маньеризме или рококо в период их «классического» развития.

Поэтому, *термин «модерн» правильнее употреблять по отношению к определённому историческому периоду*, а не к стилю, аналогично понятиям «античность», «средневековье», «ренессанс». Не случайно ещё в начале века модерн называли не художественным стилем, а «стилем жизни», так как новые веяния пронизывали собой все стороны существования человека. Г. Стернин выдвинул идею, что «модерн как научный термин уместнее ставить в ряд не с чисто стилевыми категориями, а таким историко-культурным

понятием, как бидермайер. Можно сказать, что бидермайер и модерн это начало и конец целой исторической фазы романтизма». И действительно, романтизм был главным содержанием «эпохи модерна», так же как он характеризовал период бидермайера начала XIX столетия. Модерн – это сказочность, миф, мир иллюзий, быть может, чем-то похожий на эпоху готики. Ведь неоготика была одним из важных стилевых течений искусства модерна. Идеалы модерна не смогли реализоваться в сложную переходную эпоху конца XIX-начала XX вв. Они только отразились по-разному в его многообразных течениях. Эти течения были не только разными, но, подчас, взаимоисключающими, противоречивыми и, тем не менее, переплетающимися между собой: орнаментальное и конструктивное, флореальное и геометрическое, новаторское и ретроспективное, неоклассическое и неоготическое, индустриальное и кустарное.

Среди основных течений искусства модерна обычно выделяют: флореальное искусство (Ар Нуво), неоромантическое (национально-романтическое), рациональное (геометрическое), «неопластицизм» («органическую архитектуру»), неоклассицизм.

Все эти течения объединяло общее мировоззрение *«fin du siècle»*, отличающееся, с одной стороны растерянностью, духовной усталостью, кризисом идеалов, скептицизмом и самоиронией, а с другой – настойчивыми поисками нового «большого стиля» во всех сферах творческой жизни, стиранием границ между элитарным и массовым искусством. Это приводило к двояким последствиям. Распространению мещанских вкусов, неимоверной пошлости, проникающей даже в творчество выдающихся художников, и утончённого символизма, мистики, изысканности изобразительных средств, ставших доступными потребителям искусства. Всё это удивительным образом соединилось в модерне и, в целом, выражалось в стремлении ко всему необычному, странному, фантастическому, иногда болезненному и отталкивающему. Модерн называли последней фазой искусства прошлого века, вздохом умирающего столетия. Но бесспорно также и то, что модерн

ознаменовал собой начало нового искусства. Поэтому художникам приходилось расплачиваться за модерн, и преодолевать его, и одновременно благодарить за то, что какие-то пути вперёд были намечены».

Главной особенностью искусства модерна является то, что новое в нём формировалось, прежде всего, в области архитектуры, декоративного и прикладного искусства, но не столько самими архитекторами, сколько живописцами и графиками. Точно так же в XVIII в. в эпоху рококо, творцами нового стиля были живописцы и рисовальщики, подчинившие придуманному ими мотиву рокайля всю архитектуру, скульптуру, мебель. Через полтора столетия новый, но чем-то похожий на всё тот же завиток *мотив изогнутых линий стал определяющим формальным элементом во всех видах искусства*. Первый шаг в этом направлении был сделан английскими графиками и архитекторами (А. Макмёрдо, У. Крэйн), затем бельгийцами и, конечно, парижскими, венскими, мюнхенскими художниками. Их объединило общее неприятие бывших академических норм и попыток реанимировать их за счет возрождения старых стилей. Им представлялся тупиковым путь прерафаэлитов, связанный с усилиями Дж. Рёскина и У. Морриса по возрождению традиций средневекового ручного ремесла. Они обратились не к прошлому искусства и не к будущему, которого ещё не видели, а к *природе*. Отсюда первое, натуралистическое, «флореальное», течение искусства модерна. В нём копировались природные формы, прежде всего, растительные, с подчеркиванием их динамики, движения, роста – линии выходящих, волнистых растений: лилий, камыша, цикламенов, ирисов.

В архитектуре изогнутую линию впервые применил бельгиец В. Орта в интерьерах особняка Тассель (1893). В 1895г. ученый-натуралист и художник Х. Обрист выполнил гобелен с изображением петлеобразно изогнутого стебля цветка цикламена. Журналисты окрестили эту характерно изогнутую линию «удар бича». *С этих пор она стала главным признаком «нового стиля»*.

Большое значение имело также давнее знакомство бельгийцев и французов с восточным, в особенности, японским искусством. Изысканная пластика линий и декоративность цветowych пятен японских гравюр оказала в своё время воздействие на прерафаэлитов, затем на Э. Мане и импрессионистов, постимпрессионистов. А после выхода в свет монографии Э. Гонкура о К. Утамаро (1891) «японизмы» стали всеобщей модой. Любимые мотивы художников модерна – морская волна, лебединая шея, томные женские фигуры с распущенными волнистыми волосами, извивами рук, в развевающихся складках одежд.

С 1881 г. в Брюсселе О. Маусом издавался журнал «Современное искусство» («*L'Art Moderne*»). На его страницах впервые появился термин «новое искусство» («*L'Art Nouveau*»). В 1894 г. этот термин сделал программным в своём творчестве бельгийский живописец, а затем архитектор А. Ван де Велде. Этот выдающийся мастер провозгласил знаменитый лозунг «назад к природе», ставший одним из основных девизов «нового стиля».

Ван де Велде утверждал, что естественная эволюция художественного мышления, не нарушаемая искусственными попытками повернуть назад, всегда приводит к появлению нового оригинального стиля. Ван де Велде стремился выразить своё ощущение этого стиля целостно, *во всём*, от живописи и графики до проектирования зданий, оформления интерьера, мебели, светильников, посуды, декоративных панно, книжных переплётов и даже собственноручно им выполненного платья для своей жены, гармонирующего со всей обстановкой дома. В дальнейшем это стало главным принципом искусства модерна. Сообразуясь с орнаментальной эстетикой «нового стиля», архитекторы вынуждены были задумывать и воплощать свои проекты целиком, вплоть до «последнего гвоздя»: дверной ручки, светильника, оконного переплёта или вентиляционной решётки, которая неожиданно могла стать главным декоративным акцентом всего ансамбля. Модерн эволюционировал стремительно, что особенно хорошо

видно на примере творчества Ван де Велде. Начав с живописи, он затем бросает «бесцельное изобразительное искусство» и весь отдаётся стихии орнамента «удара бича». Но всего через два-три года, как и другие художники, почти полностью освобождается от орнаментальности, которая, казалось, была неотъемлемым свойством стиля, пытается создавать формы без орнаментальной косметики, сами в себе несущие «флореальное» начало. Потом, ещё более неожиданно, изогнутые линии вообще исчезают, уступая место прямым углам, плоскостям, квадратам и кругам.

Во Франции произведения художников «нового стиля» пропагандировались благодаря деятельности З. Бинга, открывшего в 1895 г. магазин «*Maison de L'Art Nouveau*», где, наряду с образцами восточного искусства, можно было увидеть изделия Ван де Велде, Э. Грассе, Р. Лалика. Л. К. Тиффани. Выдающимся художником модерна был Э. Галле.

В Австрии модерн называли «сецессион» (от латинского *secessio* – отделение, уход), так как движение за новое искусство началось с демонстративного выхода группы молодых художников из состава выставочной организации «*Glaspalast*» («Хрустальный дворец») в знак протеста против рутины академизма. Основателями венского Сецессиона были живописец Г. Климт и архитектор О. Вагнер (1898).

Близкое польское название – сецессия (*secesja*).

В Германии «новый стиль» назывался «югендштил» (молодой стиль) от имени журнала «*Jugend*», вокруг которого группировались прогрессивно мыслящие художники. В Италии за модерном утвердилось название «либерти» («*Liberty*») по имени владельца английской фирмы, насаждавшей в этой стране «новый стиль».

На бельгийский и венский модерн сильное влияние оказало как восточное японское искусство, рекламировавшееся Бингом, так и новое, рациональное и конструктивное искусство шотландцев, в частности Ч. Макинтоша, выставки которого с огромным успехом прошли в 1901 г. в Вене и в 1902-1903 гг. в Москве. Под воздействием прямых линий мебели

Макинтоша даже ярый «флореалист» В. Орта сказал: «Я отошел от цветов и листьев и занялся стеблями и палками».

Стилистически многообразно романтическое мышление проявилось в русском модерне. Гениальным архитектором московского модерна был Ф.О.Шехтель. Но настроения модерна, так или иначе, захватили всех русских художников, в том числе и многих живописцев. Наиболее ярким представителем романтики модерна в живописи был М.А.Врубель. Характерно, что таланты Шехтеля и Врубеля соединились в работе над особняком З. Г. Морозовой в Москве (1893). В этом удивительном здании главная лестница выполнена в романтической стилизации под формы готики, парадный зал – в формах ампира, а гостиная – в стиле рококо (уже четвёртого по счёту, после периодов «второго» и «третьего рококо» в Европе). Причем эти вымышленные интерьеры обставлялись подлинной музейной мебелью. Это было типично романтическое ретроспективное мышление. Декоративные росписи и витраж Врубеля в особняке Морозовой искусно стилизованы под средневековые. Подобную особенность художественного мышления точнее называть не стилизацией, а историзмом, в котором «готические» формы являются свободными романтическими фантазиями на историческую тему. Врубель был настоящим романтиком, «рыцарем средневековья», ощущавшимся им не как прошлое, а как живое настоящее. Для русского модерна было также характерно тесное переплетение жанров и видов искусства. Врубель много занимался майоликой, а о своей картине «Сирень» он сказал, что не хотел бы, чтобы она попала в музей, потому что «музей – это покойницкая», а желал бы видеть её «вделанной в стену в жилом доме, чтобы она совершенно слилась со стеной». Стремление русских художников к организации целостной «художественно-романтической» среды проявилось в необычайно ярком явлении культуры «*fin du siècle*» – знаменитых «дягилевских сезонах» в Париже. Балетные постановки С. Дягилева с их соединением театра, музыки, искусства костюма и декорации называли «утонченной стилизацией модерна». Национальные

мотивы, стремление к созданию неорусского стиля проявились в деятельности абрамцевского кружка и мастерских Талашкино. Причем характерно, что ретроспективизм «русского стиля», к примеру, в графике Е. Поленовой, соединялся с интернациональными приёмами стилизации и обобщения формы, выработанными английским модерном У. Крэйна или французским Ар Нуво. Это говорит о том, что отдельные течения в искусстве модерна не существовали изолированно, а тесно взаимодействовали. Общие тенденции сближали творчество столь разных художников, как О. Вагнер и Ф. Шехтель, Г. Климт и М. Врубель, А. Ван де Велде и Л. Бакст. Их соединяло настойчивое стремление к эстетизации отдельных формальных приёмов: «органогенности», плоскостности, орнаментальности. Вот почему, наряду с термином «период модерна» возможно использование понятия «стиль модерн», объединяющего в себе то новое, что появилось в те годы в искусстве разных стран.

Для «стиля модерн» *главным принципом стала стилизация*, но не в смысле интерпретации форм художественных стилей прошедших эпох, как это было в период Историзма второй половины XIX в., а в смысле тенденции подчинения всех элементов композиции какому-либо одному, формообразующему началу. Таким началом могло служить всё, что угодно: исторические и национальные стили, элементы народного и примитивного искусства (Абрамцево, Талашкино), природные формы (флореальное течение), геометрический мотив («Венские Мастерские» И. Хоффманн), новые конструкции и свойства новых материалов – стали, стекла, бетона (конструктивное течение). В каждом случае художники модерна искали целостности, органичности, гармонии ансамблевых решений – изображения и плоскости, отсюда декоративность рельефов и росписей, как бы вырастающих из поверхности стен зданий; орнамента и конструкции – «орнаментализации» конструктивных элементов стальных каркасов, железных решёток, формы и пространства, интерьера и экстерьера.

В искусстве модерна декорация начала отделяться от конструкции и становиться самоцелью. Отсюда на первой стадии развития искусства модерна безудержная прихотливость орнамента, нарушающего всякую тектонику вещи, а на второй – общая атектоничность композиции. В более глубоком смысле следование «новому стилю» означало стремление к созданию «нового стиля жизни» – художественного синтеза окружающей человека среды, пространства и времени, в котором он живет, а это воистину задача «большого стиля». Вот откуда «фанатизм стиля», характерный для человека «поворота столетий». Это объясняет и пристрастие художников модерна к «вечным философским темам бытия», таинственной, часто мрачной символике, ощущению тайны. Ведь создатели нового декора из стилизованных растительных форм Орта, Ван де Велде придавали ему не только формальное, но и символическое значение. Этот декор лишь внешне, хотя подчас и очень «натурально», изображает растения, но, прежде всего, символически преображает самые заурядные конструкции из дерева, железа и бетона, объединяя в единое целое конструкцию, форму и стилизованную поверхность, что и определяет их принципиальную атектоничность, пластицизм. Метод художественной стилизации и вывел искусство модерна в разряд романтического. Так, причудливые «цветы» из металла Э. Гимара у входов в парижское метро – совершенно новые формы, лишь ассоциирующиеся, но никак не изображающие реальные растения. И даже, когда романтизм выражен не столь явно, например, в неоклассическом течении модерна, архитектура этого периода выглядит более задушевной и тёплой, чем холодный и чопорный ампи́р начала XIX столетия.

Особое место занимал в искусстве модерна символизм. В качестве самостоятельного художественного течения символизм получил развитие преимущественно в литературе, в особенности, в поэзии начала XX века. В России этот период получил название «серебряного века», во Франции символизм быстро переродился в сюрреализм. Изобразительное искусство по своей природе менее подходит для выражения символистских образов,

туманных и неясных, поэтому живописцы и графики, считавшие себя символистами, как, например. Ф. фон Штук, часто впадали в салонный, но слащавый натурализм с примесью пошловатых аллегорий, с двусмысленной, примитивной эротикой. Однако в архитектуре символизм принес неожиданные плоды. Наиболее фантастические формы символизм модерна приобрел в Испании, в творчестве гениального архитектора-символиста А. Гауди. Его невероятные с точки зрения здравого смысла произведения – нечто среднее между реминисценциями средневековья и плодом сюрреалистического воображения, свойственного национальному католическому мистицизму Испании. Стиль Гауди называли «каталонским модернизмом».

В искусстве модерна с большой силой проявился сентиментализм и пессимизм, недаром в России «стиль модерн» грустно именовали «вообще последним стилем». Трагическое противоречие, «безысходность» модерна состояла в том, что искусство этого периода разрывалось между идеальными устремлениями стилизации жизни, художественного синтеза, символизмом форм и рационализмом, прагматизмом технического века. Отсюда все несуразности, противоречия, надломленность и даже порочность многих произведений художников модерна.

В последние годы, накануне первой мировой войны, искусство модерна, главным образом, архитектура, сменило свою пластичность, «органогенность» на конструктивную ясность, простоту, рациональность, аскетизм. Возникло течение «модерн-классицизм», или модернизированная классика, представленное в Петербурге творчеством Ф.Лидваля, М.Лялевича, А. фон Гогена, М.Перетятковича. Это течение близко соприкасалось с «северным модерном», возникшим сначала в Швеции и Финляндии, а затем в Петербурге, в рамках национально-романтического движения. Одновременно появились ещё более радикальные течения неоклассицизма и конструктивизма, окончательно противопоставившие себя идеалам раннего Ар Нуво. В архитектуре «чистыми классиками» в это время слыли И. Фомин,

А.Таманян, В.Щуко, А.Щусев, И.Жолтовский. В живописи и графике – В.Шухаев и А.Яковлев. Вместе с тем, правы те, кто считает, что модерн нельзя «модернизировать», включая в него позднейшие течения, которые тогда ещё только зарождались и выделились из искусства модерна позднее.

Модерн иногда отталкивает натуралистичностью деталей, но, в целом, это искусство глубоко интеллектуально, поскольку его художники творчески переосмысливают всю историю европейского искусства. Это особенно хорошо видно на примерах рядовой застройки жилых домов петербургского модерна. Их отличает подлинно классическая строгость пропорциональных членений фасадов, но с характерной асимметричностью композиции, полукруглые или многогранные эркеры, майоликовые фризy, сильный вынос кровли на кронштейнах, ассоциирующийся с итальянской архитектурой, мелкая расстекловка окон, часто трапециевидных или с закруглёнными углами и нарядными наличниками – парафраз северного «петровского барокко», такого родного для Петербурга. А многочисленные декоративные детали: рельефы и скульптурные маски на «замковых» камнях, «ренессансная» рустовка, декоративные решётки, светильники, обелиски, башни, шпили – как будто рассказывают о том историческом пути, который прошла вся европейская архитектура.

Таким образом, искусство модерна завершило в начале XX в. свой стилистический цикл развития и, по мнению многих исследователей, вообще «классический» период романтизма европейского искусства. Многие убеждены, что художники модерна так и не смогли решить поставленные ими же грандиозные задачи по созданию нового «большого стиля» и потому модерн так и остался переходным периодом. Но ведь и художники следующего поколения не смогли создать свой стиль. Их отказ от идей модерна стал отказом вообще от идей художественности и привел к модернизму: конструктивизму, функционализму, абстрактивизму. В этих течениях исчезло человеческое, художественно-образное содержание искусства и прервалась «связь времен». Об этом с горечью писал в 1917 г.

Николай Бердяев в статье «Кризис искусства»: «Но то, что происходит с искусством в нашу эпоху, не может быть названо одним из кризисов в ряду других. Мы присутствуем при кризисе искусства вообще, при глубочайших потрясениях в тысячелетних его основах. Окончательно померк старый идеал классически-прекрасного искусства и чувствуется, что нет возврата к его образам. Искусство судорожно стремится выйти за свои пределы. Нарушаются грани, отделяющая одно искусство от другого и искусство вообще от того, что не есть уже искусство, что выше или ниже его». Вот почему, несколько парадоксально, мы всё же называем искусство модерна «последним большим художественным стилем».

Часть 2. Пешеходная экскурсия по теме «Архитектура Екатеринбурга в стиле модерн»

Знакомство с екатеринбургской архитектурой начала XX века позволяет при использовании разнообразных приёмов показа и рассказа познакомить не только с историей возникновения данного архитектурного стиля и с его направлениями, но и со специфическими особенностями провинциального екатеринбургского модерна⁸.

Продолжительность экскурсии составляет 1 час 30 минут. В пешеходный маршрут входит 8 объектов в следующей последовательности:

1.	Усадьба Утякова	ул. Клары Цеткин, 1
2.	Здание музея «Литературная жизнь Урала»	ул. Пролетарская, 10
3.	Дом Анцелевича	ул. Пушкина, 28
4.	Здание аптеки Вейерсберга	ул. Пушкина, 16
5.	Дом Заварзина	ул. Пушкина, 8
6.	Здание лечебницы врачей специалистов	ул. Пушкина, 1
7.	Дом Казанцева	ул. Гоголя, 20
8.	Дом Кругляшева	ул. Гоголя, 22

⁸ Для удобства читателя в конце раздела размещён глоссарий архитектурных терминов.

Задачи экскурсии:

- дать экскурсантам представление об общих чертах стиля модерн;
- познакомить экскурсантов с разными типами сооружений построенных в стиле модерн;
- выявить стилистические особенности уральского модерна на примере архитектуры Екатеринбурга;
- выделить проявления симметрии и асимметрии в объектах экскурсии;
- способствовать воспитанию эстетического вкуса, культуры горожанина, любви к родному городу.

Модерн – скорее, не стиль, а исторический период нового искусства, который называли «стиль жизни». Художники модерна искали целостности, органичности, гармонии ансамблевых решений. Все проекты задумывались и воплощались в едином стиле – от основных конструкций до малейших деталей интерьера. Главное содержание эпохи Модерн – романтизм. В этот период определяющим формальным элементом во всех видах искусства был мотив изогнутых линий, повторяющих природные, прежде всего растительные формы. Эти формы определяли принципиальную атектоничность конструкций и декора, что выражалось в проявлении асимметрии.

Модерн, как стиль, не был однороден по времени. На протяжении своего короткого существования (около полутора десятков лет) модерн несколько изменился. Начался модерн с полного отказа от каких бы то ни было традиций, позднее русские архитекторы часто использовали его приёмы в сочетании с различными историческими мотивами – так называемый стилизаторский модерн. Были и другие промежуточные направления.

Существование модерна не было долговечным, и этот стиль не стал господствующим в русской архитектуре. Наряду с ним в начале XX века

существовали неорусский стиль, неоклассицизм, различные мотивы эклектики. В застройке Екатеринбурга II половины XIX – начала XX веков в полной мере отразились тенденции, характерные для русской архитектуры капиталистического периода.

Историческая застройка центра современного Екатеринбурга в массе своей представлена зданиями и сооружениями второй половины XIX века и начала XX вв. В отличие от отдельных уникальных зданий и ансамблей классицизма, эта застройка носила периметральный характер и при этом хорошо сохранилась до наших дней в виде целых массивов, кварталов и улиц. При всей разнотильности этой застройки нельзя не признать, что она во многом определяет неординарность облика современного города, придаёт характерность его историческому центру.

В 1900-х годах в архитектуру города проникает модерн – стилевое направление, стремившееся к выработке новых форм за счёт подчеркивания асимметрии, нарочито оригинальных декоративно-изобразительных приёмов. Модерн как новый стиль XX века нашёл отражение лишь в отдельных постройках Екатеринбурга, не получив большого распространения в архитектуре уральского города. В жилых домах отдельные приёмы этого стиля, как правило, соединялись эклектичным смешением других стилей – это было проявление стилизаторского модерна, хотя есть и очень характерные здания «чистого» модерна. Несмотря на то, что асимметрия одно из основных проявлений модерна, всё же в архитектуре Екатеринбурга присутствуют и симметричные здания, выполненные в стиле модерн. Этот стиль поражает разнообразием линий и фигур, которые являются элементами архитектуры и декора.

Поскольку модерн как архитектурный стиль имел определённые временные границы, а на рубеже XIX и XX веков город был ограничен с четырёх сторон улицами Московской, Северной (сейчас Челюскинцев), Восточной, 4-й загородной (сейчас Щорса), то, естественно, что памятники

модернисткой архитектуры оказались сосредоточенными в центре современного города.

Просуществовав чуть более десятка лет, модерн сумел не просто внедриться в столичный и провинциальный быт, но и придать ему особую окраску. Рассчитанные не на музейные залы, а на бытование в повседневной жизни произведения модерна активно вторгались в окружающую среду, в обыденное сознание обитания в этой среде, не только отражая сложившуюся духовную атмосферу, но и заметно влияя на неё. Даже спустя десятилетия хорошо видно, что модерн успел наложить заметную печать на архитектурный облик многих городов России, в том числе и на облик Екатеринбурга.

Пешеходный маршрут экскурсии «Архитектура Екатеринбурга в стиле модерн» целесообразно начинать с Литературного квартала, так как здесь на небольшом участке сосредоточено два интересных объекта, построенных в стиле модерн – дома по адресу Клары Цеткин, 1 и Пролетарская, 10.

Первым экскурсионным объектом является усадьба горного техника П. М. Утякова по улице ***Клары Цеткин, 1***, включающая в себя дом и ворота. Ориентировочная дата постройки – 1900-е годы. Автор проекта неизвестен. Одноэтажный деревянный с каменным цоколем расположен в историческом районе Екатеринбурга, в кварталах застройки улиц, спускающихся от Вознесенской горки к набережной городского пруда. Объём дома состоит из нескольких частей. Основная его часть поставлена с незначительным отступом от красной линии улицы, на которую выходит высокое парадное крыльцо. Перпендикулярно ей, вглубь дворового участка, развивается боковая часть с выступом на главном фасаде, увенчанная высоким треугольным фронтоном. Со стороны двора объём дома усложнён наличием пристроев, крылец, открытой терраски на северо-западном боковом фасаде. В целом, объёмная композиция асимметрична. Основная часть главного фасада почти лишена декоративного убранства: выделяются лишь

характерные для стилистики модерна формы окон цоколя и переплет окон основного этажа.

Цоколь отделён рельефным пояском с декоративными кронштейнами. Основной акцент в композиции главного фасада сделан на форме парадного крыльца, членениях и убранстве бокового ризалита. Парадное крыльцо имеет глухое бетонное ограждение со столбиками, на которые нанесен линейный геометрический орнамент. В фасадной плоскости бокового ризалита главное положение занимают находящиеся на центральной оси большие окна цокольного и основного этажа, а также слуховое окно чердака. Дощатая обшивка углов ризалита украшена резным геометрическим декором. Такой же линейный рисунок использован в резьбе фриза. Ризалит венчается треугольным фронтоном со значительным выносом карниза, раскрепованным над углами. Карниз в местах раскреповки поддерживается фигурными кронштейнами. Весь декор выполнен в стилистике модерна.

План дома асимметричен. В планировочной композиции использована коридорная схема. Из интерьерного убранства сохранились штукатурные потолочные тяги, филенчатые двери, печь с декорированной лицевой поверхностью. К боковому ризалиту примыкают высокие ворота, криволинейные очертания которых решены в тех же стилевых формах модерна.

Следующий экскурсионный объект по улице *Пролетарская, 10*, так же, как и предыдущий, представлял собой в прошлом жилой дом. В настоящее время это – здание музея «Литературная жизнь Урала XX века». Дом, некогда украшавший улицу Колобовскую, современную Толмачёва, сгорел. В ходе создания Литературного квартала было решено восстановить его, но на другой улице, Пролетарской. Это эффектный деревянный резной дом с высоким гранитным крыльцом и коваными перилами. Следует обратить внимание на то, что верхняя часть дома деревянная, а нижняя каменная. Это было связано с тем, что в то время очень часто горели дома, и если второй этаж сгорит, то его просто заново выстраивали. Это здание

является памятником архитектуры, образцом деревянного зодчества в стиле «модерн». Модерн – в переводе с французского означает новейший, современный. Он характеризуется принципом синтеза искусств и позволяет зрителю наблюдать оригинальную и яркую эстетику. Этот стиль является синтетическим стилем, который сочетает несколько материалов, в данном случае – дерево и камень. Следует обратить внимание на необычные формы окон (одно окно имеет форму шара, а другие – форму замочной скважины) и на очень красивые кокошники (они также имеют форму замочной скважины). Дом ранее принадлежал присяжному поверенному Л. И. Иванову, но сейчас в нём расположен музей. На первом этаже музея экспонируются разноплановые выставки, проходят литературные чтения и презентации новых книг, встречи с писателями и научные конференции в концертном зале. В этом же зале каждую субботу в 16.00 проводятся дни русского романса. На втором этаже разместился отдел фондов, где хранятся писательские архивы, редкие книги, произведения живописи, графики, старинная мебель и предметы быта.

Каменный *дом А. В. Анцелевича* был построен в 1900-е годы. Если два предыдущих экскурсионных объекта относятся к жилым особнякам, то это здание типологически относится к кругу доходных домов. Главный фасад дома асимметричен. В его композиции выделяется крупный боковой ризалит со входом, балконом и высоким венчающим фронтоном ломаных очертаний. Ему соответствует небольшой фронтон в левом крыле, также вносящий динамический акцент в силуэт постройки. Отделка фасада с расшивкой крупного модуля подчеркивает монолит стены, которая расчленена узкими, вытянутыми по вертикали парными окнами. Плоскость бокового ризалита организована симметрично относительно центральной оси со входом и балконом. Здание является образцом сооружения в «рациональной» разновидности стиля модерн.

Перейдя через дорогу, можно увидеть здание аптеки провизора Вейерсберга на улице *Пушкина, 16*. Возможно, что автором проекта был И.

К. Янковский. Интересно, что и до этого в этом месте было здание аптеки, построенное специально для неё. В конце прошлого XIX века здесь находилось одноэтажное здание с мезонином – каменное здание аптеки – и оно имело симметрическую композицию. К входу в высокий первый этаж, расположенному в центре фасада, вело каменное распашное крыльцо до двух метров высотой, облечённое полуциркульной аркой и кованым металлическим ограждением. В 1910-м году на месте этого здания был построен двухэтажный каменный доходный дом, также с аптекой, размещённой на первом этаже. Дом является образцом использования фасадной композиции скульптурно-лепного декора в стиле классического модерна, на что указывает стилизованный растительный орнамент и скульптурные женские головки.

Следующий дом по улице *Пушкина, 8*, построенный в стиле модерн – это каменный трёхэтажный дом, расположенный на принадлежавшем купцу А. Т. Заварзину участке, который в конце 1880-х годов числился как «пустопорожнее место». В композиции главного фасада с открытой кирпичной кладкой использован геометрический орнамент, характерный для «кирпичной» разновидности модерна. Размер окон первого этажа и рисунок оконных переплетов схожи с такими же фрагментами дома Утякова и указывают на влияние стилистики модерна.

Помимо жилых домов в городе существовали и другие здания, использовавшие эстетику модерна. Например, здание лечебницы врачей-специалистов по адресу *Пушкина, 1*, построенное архитектором И. К. Янковским в 1900-е годы. Масштаб этого здания можно почувствовать, двигаясь вдоль его стен. Каменное трёхэтажное здание возведено на пересечении улиц Пушкина и Малышева. В композиции дома выделяются уличные фасады и выражен угловой акцент, который ослаблен утратой большого декоративного углового купола. Характерная черта членений фасадов – наличие окон разного размера и конфигурации: окна-витрины первого этажа, спаренные и тройные арочные окна второго этажа, большие

окна третьего. Убранство фасадов составляет богатый лепной декор, в котором преобладают барочные мотивы растительного орнамента, с включением деталей стилистики модерна. Влияние модерна выражено и в формах третьего этажа. В архитектуре общественных сооружений Екатеринбурга начала XX века здание лечебницы знаменует новый этап: укрупнение масштаба, рост этажности, освоение в композиции новых стилевых направлений русского зодчества. В этом здании сейчас располагается стоматологическая клиника.

Усадьба И. П. Казанцева по составу построек имела только жилое назначение. Деревянный двухэтажный дом существовал уже в 1880-е годы. В начале XX века дом расширен и после перестройки приобрёл характер доходного: состоял из нескольких квартир. Крупный объём занимает угловое помещение на обширном участке, раскрываясь фасадами на две улицы. В убранстве фасадов использован резной декор. По стилевым формам декоративное убранство представляет смешение модерна с мотивами «русского» стиля. Дом представляет собой образец профессионального деревянного зодчества в Екатеринбурге рубежа XIX-XX веков.

Дом наследников Кругляшева на улице *Гоголя, 22* построен в 1900-е годы, возможно, по проекту архитектора А. А. Федорова на месте жилого полукаменного двухэтажного дома чиновника А. И. Кругляшева. Дом занимает угловое положение в квартале с разреженной застройкой. Уличные фасады с открытой кирпичной кладкой отличаются по приёмам членения. Их объединяет только смещение к углу криволинейных венчающих фронтонов, которые вносят угловой акцент в композицию особняка. Кирпичный особняк имеет оригинальную композицию в стилистике модерн: обыгрывание формы больших объёмов, их асимметричная группировка, линейный динамический рисунок фронтонов и других деталей фасада. Это здание представляет историко-культурную ценность как выражающее определённое направление «кирпичного» модерна в жилой архитектуре Екатеринбурга начала XX века.

Дом Кругляшева – последний, восьмой, объект пешеходной экскурсии. Необходимо отметить, однако, что наиболее типичные и красивые здания Екатеринбурга, построенные в стиле модерн, либо не сохранились вообще, либо находятся в перестроенном или изменённом виде. Так, типичным образцом модерна в Екатеринбурге было здание первого в городе кинематографа «Лоранж» (позднее «Совкино»), построенное в 1909 году архитектором К. А. Полковым. Оно просуществовало до середины 1960-х годов на углу Главного и Вознесенского проспектов (пр. Ленина, 43), потом было перестроено в здание нынешнего Театра Музыкальной Комедии. Здание отличалось преобладанием наклонных линий. Также наблюдалась некая асимметрия в композиционных деталях фасада с выступающими вверх ризалитами. Между ризалитами были расположены окна, здание снаружи не имело декоративного декора. Но устремленные вверх ризалиты Коробовой формы наверху и причудливые линии, разделяющие этажи здания, как бы ослабляли цельность стен и конструкций, придавали ему движение. Примечательными в этом здании были размеры и форма окон. Сейчас, конечно, не осталось даже отдалённого представления об этом здании в городе, имеется лишь фотография, изображающая кинотеатр того времени.

Печальная участь постигла и здание на углу Покровского проспекта (ул. Малышева) и улицы Вайнера, построенное в 10-х годах XX века. Типичный доходный дом того времени, известен был тем, что в нём был магазин «Проводникъ», который торговал среди прочего и галошами фирмы «Красный треугольник». Ныне в нижней части этого здания располагается «Салон часов». Это здание отличалось своеобразным оформлением фасада: извивающиеся, текучие линии карниза, изящный декор, невесомость. Здание имеет условную симметрию, вход в здание был с угла. Над входом, на уровне третьего этажа возвышались две опоры, на которых восседали два орла и держали в клювах вывеску с названием фирмы. Модернистский верх не сохранился, и здание было достроено. В прежнем виде сохранились лишь нижняя часть здания с характерными оконными проёмами.

Часть 3. Автобусная экскурсия по теме «Архитектура Екатеринбурга в стиле модерн»

Сохранившиеся до настоящего времени здания в стиле модерн на улицах Екатеринбурга располагаются, в основном, в центральной части города. Вместе с тем они нередко удалены друг от друга, что затрудняет знакомство с ними в рамках только пешеходного маршрута. Поэтому целесообразно разработать и автобусный маршрут.

Автобусная экскурсия рассчитана на 2 часа 30 минут и включает 13 объектов в следующей последовательности:

1.	Дом Шубиной	ул. Розы Люксембург, 43а
2.	Дом Онуфриева	ул. Розы Люксембург, 71
3.	Дом Сяно	ул. Карла Либкнехта, 2
4.	Дом Шаньгина	ул. Карла Либкнехта, 32
5.	Здание филармонии	ул. Карла Либкнехта, 38
6.	Дом Селивановой	ул. Толмачёва, 24
7.	Торговый дом А.В. Второва	ул. Вайнера, 10
8.	Здание Товарной биржи	ул. Вайнера, 9
9.	Здание магазина «Проводникъ»	ул. Вайнера, 18
10.	Типография «Гранит»	ул. Вайнера, 11
11.	Дом Мишиных	ул. Февральской революции, 9
12.	Дом Петровых	ул. Февральской революции, 11а
13.	Дом Серебряковых	ул. Октябрьской революции, 27

Задачи экскурсии:

- дать экскурсантам представление об общих чертах стиля модерн;
- познакомить экскурсантов с разными типами сооружений построенных в стиле модерн;
- выявить стилистические особенности уральского модерна на примере архитектуры Екатеринбурга;

- выделить проявления симметрии и асимметрии в объектах экскурсии;
- способствовать воспитанию эстетического вкуса, культуры горожанина, любви к родному городу.

Первым экскурсионным объектом является *дом А. Е. Шубиной* по улице Р. Люксембург. Деревянный особняк, построенный в 1910-е годы, представляет собой асимметричный двухчастный объём: левая двухэтажная часть с сильным выносом двускатной кровли имеет большое окно и балкон на кронштейнах. Одноэтажная часть развивается перпендикулярно к ней. На главном фасаде дома выделяются окна с линейно-геометрическим рисунком наличников и переплётов. Этот дом представляет собой образец городского особняка в упрощённых формах модерна.

Дом врача В. М. Онуфриева. Каменный двухэтажный особняк известного в городе врача построен в 1912 году архитектором И. К. Янковским. Особняк расположен в квартале с исторической застройкой и в настоящее время примыкает к территории комплекса первого городского родильного дома. Следует обратить внимание на фасад дома, так как именно в композиции и убранстве главного фасада ярко выражена стилистика модерна, с криволинейными окнами второго этажа, характерными для модерна, и линейно-геометрическим орнаментом на лопатках.

Дом врача А. И. Сяно по улице К. Либкнехта, 2. Это – одно из удивительных зданий эпохи модерна, известное как особняк Штроля. В этом доме снимал квартиру знаменитый в Екатеринбурге врач А. И. Сяно, поэтому его часто называют домом Сяно. Если предыдущие экскурсионные объекты представляли собой жилые дома, то данный объект – типичный доходный дом по типу и составу помещений. Первый этаж сдавался в аренду под магазины и конторы. На втором этаже кроме жилых комнат имелись приёмная врача и больничные покои. Полукаменное двухэтажное с полуподвалом здание занимает угловое положение на перекрёстке двух

центральных улиц Екатеринбурга – бывших Покровского и Вознесенского проспектов (ул.Малышева и К. Либкнехта). Имеет нехарактерный для подобного типа домов крупный масштаб, что обусловлено его градоформирующим значением. Местоположение дома ставило перед архитектором контрастные задачи: с одной стороны, необходимость создания композиции, оформляющей пространство площади на пересечении проспектов, а с другой – создание образа, неизбежно подчинённого активной форме римско-католической церкви – костёла, расположенного напротив. Отсюда и достаточно сдержанное решение пластического образа, в то время как модерн декларировал подчёркнутую самостоятельность в архитектурно-пространственной среде. Здание имеет оригинальную конструкцию с угловой композиционной основой и в плане представляет собой ущербный квадрат, в отсутствующей одной четвёртой части которого естественно располагается внутренний двор. Угловая часть дома акцентирована срезом объёма. Важную роль играет динамичный силуэт здания, образованный высокими кровлями ломаных очертаний. Главный фасад здания асимметрично расчленён двумя ризалитами. На уровне первого этажа большие арочные окна отделаны крупным рельефом. На уровне второго этажа окна имеют прямоугольную форму. Они живописно сгруппированы и украшены резными наличниками. Наличники окон, рисунок их переплётов и резной декор фасадов характерны для стилистики модерна.

Отсутствие импозантного декора, характерного для провинциального модерна, позволяет скорее увидеть те серьезные изменения в отношении к архитектурной форме, благодаря которым внешний облик стал отражать особенности внутренней жизни здания.

Далее – *дом чиновника Шаньгина* по улице К.Либкнехта, 32. Это одноэтажное каменное здание на бывшем Вознесенском проспекте считается образцом особняков модернистского стиля. В 1880-е годы усадьба чиновника А. Н. Шаньгина состояла из деревянного одноэтажного дома и служб. Новый дом, сходный по композиции с домом врача М. В. Онуфриева, возведён на

участке с примыканием к дому А. И. Падучева. Возможно, дом построен по проекту архитектора И. К. Янковского.

Средняя часть здания с широким окном, разделённая на всю высоту стен пилястрами, чуть выше других фланирующих объёмов. Тройное окно в верхней своей части имеет лучковое очертание. Венчает среднюю часть парапет сложного модернистского рисунка. Архитектурная композиция здания, в целом, асимметрична. Фасад расчленён линейно-геометрическим рельефом, характерным для стиля модерн. Позднее справа к этому зданию был сделан пристрой, но модернистский стиль здания сохранился. После революции здесь был расположен Музей молодёжных движений, сейчас там проходят всевозможные выставки и презентации.

Помимо жилых домов, город строил в стиле модерн и общественные здания. Здание Филармонии (бывшего Делового клуба) по адресу К. Либкнехта, 38а было построено архитектором К. Т. Бабыкиным при участии Г. П. Валенкова и Е. Н. Кроткова и, строго говоря, сочетало в себе черты разных архитектурных стилей. Оно было начато ещё до революции, а закончено в 1927 году. В этом здании уже проявилось конструктивистское направление, но можно выделить и черты, характерные для модерна – его внешние пластические формы носят явно декоративный характер.

Некоторые принципы, заложенные в первоначальном проекте, в частности, применение большого ордера на главном фасаде, использованы в окончательном архитектурном решении. Композиция и убранство главного фасада основаны на крупномасштабных и пластичных деталях, придающих облику здания представительность и парадность. Таков же характер убранства интерьеров – с обилием лепного декора, альфрейной живописью на потолках, ордерными элементами. В декоре здания взаимодействуют две художественные системы: первая, опирающаяся на классицистические традиции и стилистику модерна, и вторая, представляющая уже советское искусство 1920-х годов – со специфической тематикой монументальных росписей и барельефов. Росписи выполнены художниками А. Н.

Парамоновым, В. Л. Елисеевым и Н. И. Елтышевым в 1925-1926 годах. Автор барельефов на главном фасаде – преподаватель Уральского художественного техникума Лялин.

Следующий объект – *дом Селивановой* по адресу Толмачёва, 24, построенный архитектором Ю. И. Дютелем в начале XX века. Этот деревянный дом со вторым полуэтажом расположен в центральном районе города, вблизи главного проспекта. Главным фасадом дом обращён на бывшую Колобовскую улицу. Объёмная композиция этого здания живописна. Она образована сложным ритмом выступающих и западающих поверхностей стен, создающих имитацию «хоромности» компактного здания. Главный, западный фасад асимметричен. Асимметрия фасада подчёркнута смещением входа к углу здания. Вход акцентирован козырьком над дверью и куполообразной башенкой со шпилем и круглыми окошками. Оконные проёмы различных пропорций образуют сложный ритмический ряд по главному фасаду. Живописность силуэта обусловлена тем, что верхний этаж по площади меньше нижнего и играет как бы роль мезонина, перекрытого плоской шатровой кровлей. Со стороны южного фасада выступает остеклённая веранда, придающая зданию какой-то южный колорит. Двухэтажная часть здания развивается в глубину участка. Главный фасад трёхчастен и акцентирован ризалитами. Каждому из ризалитов соответствует сложное венчание из куполов на постаментах. На куполах водружены декоративные фонари с высокими шпилями. Фасад украшен резьбой, демонстрирующей богатство техники и разнообразие мотивов орнаментики народного зодчества. Здание относится к числу лучших для Екатеринбурга деревянных особняков конца XIX века.

Следующий экскурсионный объект – это здание магазина «Товарищество А. Ф. Второва с сыновьями» (ныне торговый дом «Успенский») по улице Вайнера, 10. *Торговый дом Второва* на Успенской (сейчас улица Вайнера) славился как самый лучший дамский магазин в Екатеринбурге. Даже в советские годы он долго назывался «Второвским».

Кстати, А. Ф. Второва называют «отцом русских супермаркетов». Он сделал карьеру и миллионы, развернув в Сибири и на Урале сеть фирменных магазинов. Во второвских пассажах можно было купить всё. Второв первый застроил своими пассажами всю Россию, сто лет назад положив начало всем ГУМам, ЦУМам и «Детским мирам».

Первоначально здание строилось в стиле модерн, в конце 20-х годов здание пострадало от пожара. В 1928 году на основе бывшего магазина был разработан проект кинотеатра, а в 1929 году фасад прикрыли конструктивистской стеной, внутри спланировали зрительный зал и открыли городской Драматический театр. Через 50 лет для театра построили новое специальное здание, а старое отдали под магазин.

Далее следует *здание Товарной биржи* (позже универмаг «Пассаж») на улице Вайнера, 9. Здание построено в 1916-1925 годы архитектором К. Т. Бабыкиным. Каменное трёхэтажное здание расположено на территории бывшей Торговой площади. Строительство биржи велось в течение длительного времени, что наложило отпечаток на её архитектуру. Спроектированная по образцу столичных деловых домов дореволюционного периода в формах рационального модерна, в окончательном варианте она обрела и ряд черт архитектуры конструктивизма. Здание имеет вытянутый в направлении запад-восток объём и главным торцевым фасадом раскрыто на улицу Вайнера. В 1929 году перед северным фасадом биржи по проекту архитектора С. В. Домбровского был разбит сквер. Фасады биржи расчленены большими окнами витринного типа с узкими простенками между ними. «Каркасной» структуре боковых северного и южного фасадов противопоставлена более традиционная симметричная схема главного фасада с центральным положением входа и венчающим его фронтономчиком.

Здание магазина «Проводникъ» по улице Вайнера, 18 построено ориентировочно в 1900-е годы. В начале XX века двухэтажное здание в силу своего месторасположения – на углу Покровского проспекта и торговой улицы Успенской – и яркой зрелищной композиции в стиле модерн, стало

«визитной карточкой» торгового центра Екатеринбурга. Его угловой объём открывал перспективу улицы с непрерывной цепью корпусов торговых построек по её чётной стороне и примыкал к магазину Агафуровых. В советский период, в течение 1930-х годов, здание было надстроено до четырёх этажей и лишилось декоративного убранства. После перестройки преемственность с первоначальным обликом просматривалась лишь в отдельных фрагментах композиции. Наличие углового акцента, вертикальные членения лопатками, продолженные на новую высоту фасадов, частый рисунок переплетов окон верхних этажей напоминают о модерне. В новом качестве постройка представляла смешение конструктивистских форм с остаточными элементами стилистики модерна. В настоящее время здание вновь перестроено со стилизацией в формах модерна.

В Екатеринбурге есть образцы не только раннего модерна, но и позднего, так называемого рационального, отказавшегося от декоративных моментов в пользу простоты и функциональности. К таким зданиям можно отнести *особняк по улице Вайнера, 11* (сейчас там располагается Картинная галерея). Этот особняк имеет очень интересную историю. Что только не размещалось под его крышей! Надо сказать, что строилось оно не для картинной галереи, это был заказ купца Бардыгина архитектору К. Т. Бабыкину на постройку особняка. Особняк был выстроен в 1913-14 гг., внизу было отведено место для магазина, а наверху располагались жилые помещения самого купца и его семьи. Оно не перестраивалось, сохранило свой первоначальный облик. Купеческим особняком здание было до революции, после революции там была типография «Гранит», а сейчас это Картинная галерея. Невысокое двухэтажное каменное здание серого цвета почти лишено декора, выглядит очень просто, но изящно. Здание имеет простую прямоугольную конфигурацию. В его объёме выделяется третий увенчанный фронтоном полуэтаж-мезонин, возвышающийся по оси главного входа, с пластичным по форме балконом. Главный фасад дома асимметричен. Относительно его части с главным входом развиваются два разновеликих

крыла. Фасад с облицовкой имеет плоскостное решение. Его членят ряды окон (на первом этаже – витринного типа) и лопатки в простенках. Главный вход акцентирован высоким порталом и арочным окном над ним. По верху дома, между декоративными парапетными столбиками, проходит легкая чугунная решётка линейного рисунка. Такой же решёткой забран балкон. По своим архитектурным особенностям здание представляет рациональную разновидность модерна.

Дом Мишиных на улице Февральской революции, 9 построен в 1900-е годы архитектором И. К. Янковским. Это деревянный, одноэтажный дом, подчеркнуто асимметричный, на высоком фундаменте из гранитных блоков, с резной деревянной дверью главного входа у самого угла, а над ней – затейливое подобие козырька, над другим углом – чешуйчатый полукупол с неким шишаком. Главный фасад трёхчастен. В левой части расположен вход с окном верхнего света. Особенность фасадной композиции – большие окна с линейным рисунком переплётов. Следует обратить внимание на то, какие они широкие, и какой прихотливый плавный рисунок образуют остеклённые рамы, выполняющие свое предназначение. Есть еще рамы, окаймлённые наличниками, на глухой стене, обращённой к дорожке. В декоре использована орнаментальная резьба. Уникальный по архитектурному решению деревянный особняк вместе с домом № 11 образует фрагмент исторической застройки бывшей Коробковской улицы в единых стилевых формах модерна.

Далее по маршруту находится **дом Петровых** на улице Февральской революции, 11а. Он построен в 1900-е годы по проекту архитектора А. А. Фёдорова. Композиция данного особняка асимметрична. Его объём трёхчастен: наиболее развитая левая часть, объём-связка и правая часть в одно окно поэтажно. По отношению к левому крылу остальные части здания и их фасады решены достаточно нейтрально. Фасад левого крыла представляет концентрацию изысканных форм модерна. Композиционный и декоративный узел образует мягко круглящийся объём с проёмами второго

этажа, немного заглублённый в толщу стены, на которую наложены две полуколонки. Над ним – арочный фронто́н с овальным окошком верхнего света в окружении лепнины. Под ним – длинный балкон с невысокой решёткой ограждения. Фасад венчается высоким фронто́ном ломаных очертаний, с радиальной расшивкой и фактурной лепниной. Тонкий художественный акцент вносят рисунки переплётов окон. Особняк двухэтажный, кирпичный, оштукатуренный, рустованный до середины очень высокого (по нынешним меркам) первого этажа, оснащённый довольно замысловатыми деталями. Обращают на себя внимание оформление балкона на главном фасаде, характерная ниша с тыльной стороны, подсказывающая, что там расположена лестница, ведущая с чёрного входа на второй этаж, строгая конфигурация окон, симметрично расположенные гипсовые гирлянды на главном фасаде.

Заключительным экскурсионным объектом является **дом Серебряковых** по улице Октябрьской революции, построенный в 1910-е годы по проекту архитектора И. К. Янковского. Одноэтажный деревянный особняк совершенно не похож на предыдущие дома, но явно состоит с ними в родстве по своим стилистическим особенностям. Композиция особняка построена на живописной асимметричной группировке объёмов. Его угловая часть выделена крупными лучковыми фронто́нами с сильным выносом за плоскость стены. Почти вся плоскость фасадов занята группой из трёх окон – крупного центрального и двух узких боковых. Здесь расположено два входа, каждый с крыльцом. Резной декор украшает не только окна, но и створки дверей. Дом обнесён низкой решётчатой оградой с рисунком в ключе модерна. Следует обратить внимание на выразительность простых декоративных деталей из фигурно выпиленных досок, на высокое крыльцо богатого, достойного и гостеприимного дома, а также на кованые решётки, которыми обнесён палисадник и украшены крыльцо и фасад. Это очень характерные для старого Екатеринбурга детали архитектуры. В убранстве комнат использована лепнина на карнизах и в плафонах. В интерьере

сохранился чугунный каслинский камин 1907 года. Жили в таких домах, конечно же, не бедные, но вполне рядовые екатеринбургские обыватели.

Заключение. Итак, мы убедились, что модерн в Екатеринбурге достаточно разнообразно представлен, но наиболее своеобразным для нашего города является «деревянный модерн». В качестве основных особенностей Екатеринбургского модерна можно назвать самостоятельность каждого здания относительно окружающих построек и отсутствие импозантного декора. В заключение хотелось бы привести слова Шарля Блана, которые выражают сущность модерна: «Архитектура ... – это не сооружение, которое украшают, а украшение, которое строят».

Задание для учащихся:

1. Выбрать строение, выполненное в стиле модерн и отметить в нём элементы симметрии, которые присутствуют скрыто или явно во внешнем облике и/или деталях оформления.

2. Определите, какие геометрические формы (фигуры) характерны для стиля модерн.

3. Определите, как проявляется орнаментальность в сооружениях, выполненных в стилистике модерна.

Подготовить сообщение и поделиться найденным со своими одноклассниками на заключительном форуме по теме «Математика и архитектура».

ГЛОССАРИЙ

Абрис – очертание предмета.

Акротерии – архитектурные скульптурные украшения, поставленные по углам здания и на вершине его фронтона в виде пальметты (веерообразного пальмового листа), статуи и т. п.

Акцент – подчёркивание, усиление.

Ампир (от франц. empire, букв. – империя) – стиль в архитектуре и декоративном искусстве трёх первых десятилетий XIX в., завершивший развитие классицизма. Массивные лапидарные, подчеркнуто

монументальные формы и богатый декор (военные эмблемы, орнамент), опора на художественное наследие императорского Рима, древнегреческой архаики, Древнего Египта служили воплощению идей государственного могущества и воинской силы.

Антаблемент – верхняя часть сооружения, обычно лежащая на колоннах, составной элемент классического архитектурного ордера; членится на архитрав, фриз и карниз.

Античность – культура Древней Греции и Рима (примерно VII в. до н. э. – IV в. н. э.)

Арка – криволинейное перекрытие проёма в стене или пространства между двумя опорами (столбами, колоннами, пилонами).

Аркада – ряд одинаковых арок, опирающихся на колонны или столбы.

Архитектоника – построение художественного произведения.

Аттик – стенка, возведённая над венчающим архитектурное сооружение карнизом. Часто украшается рельефами или надписями. Обычно завершает триумфальную арку.

Балкон – выступающая из стены и огражденная (решёткой, балюстрадой или парапетом) площадка на консольных балках на фасаде или в интерьере здания.

Балюстрада – ограждение лестниц, террас, балконов рядом фигурных столбиков-балясин, объединённых сверху перилами.

Барельеф – тип скульптурного декора, детали, изображения которого выступают из плоскости фона не более чем на половину своего объёма.

Барокко (от итал. *barocco*, букв. – причудливый, странный), – один из главенствующих стилей в европейской архитектуре и искусстве конца XVI – середины XVIII вв.

Башня – сооружение, высота которого намного больше его горизонтальных размеров (сторон или радиуса основания).

Бидермайер (от нем. *Biedermeier, Biedermaier*) – стилевое направление в немецком и австрийском искусстве около 1815-1848. В бидермайере

отразились представления бюргерской среды. Архитектура и декоративное искусство бидермайера перерабатывали формы ампира в духе интимности и домашнего уюта. Для живописи бидермайера характерно тонкое, тщательное изображение интерьера, природы, бытовых деталей.

Бра – настенный светильник.

Веранда – открытое или застеклённое помещение, пристроенное или встроенное в здание; род балкона.

Волюта – украшение в виде завитка на верху колонны.

Горельеф – вид скульптуры, высокий рельеф, в котором выпуклое изображение сильно выступает над плоскостью фона (более чем на половину своего объёма); иногда оно лишь прикасается к фону, иногда отделяется от него в деталях. Монументально-декоративные горельефы часто использовались в архитектуре.

Готика (от итал. *gotico*, букв. – готский, от названия германского племени готов) – готический стиль, художественный стиль (между серединой XII и XV-XVI вв.), завершивший развитие средневекового искусства в Западной, Центральной и отчасти Восточной Европе. В готике отразились кардинальные изменения в структуре средневекового общества. Ведущим архитектурным типом стал городской собор: каркасная система готической архитектуры (стрельчатые арки опираются на столбы; боковой распор крестовых сводов, выложенных на нервюрах, передается аркбутанами на контрфорсы) позволила создавать небывалые по высоте и обширности интерьеры соборов, прорезать стены огромными окнами с многоцветными витражами.

Готика пламенеющая – французский позднеготический стиль, для которого характерно применение криволинейных волнистых узорчатых линий.

Декор – система украшений сооружения (фасада, интерьера) или изделия.

Живопись альфрейная – роспись водяными красками по сырой штукатурке.

Импост – в классической архитектуре горизонтальная тяга в виде карниза или выступа, служащая опорой для венчающей стену арки. В древнерусской архитектуре – верхняя часть лопатки, выполняющая функцию капители.

Интерьер – внутреннее пространство здания или каких-либо помещений (вестибюль, фойе, комната, зал).

Камин – пристенная открытая печь с прямым дымоходом.

Капитель – верхняя часть колонны, поддерживающая антаблемент. По той или иной форме капители отличаются архитектурные ордера один от другого. Капителей считается пять: дорическая, ионическая, коринфская, тосканская и сложная.

Карниз – горизонтальный выступ на стене, поддерживающий крышу здания и защищающий стены от стекания воды.

Картуш – лепное или графическое украшение в виде обрамлённого завитками щита или полуразвёрнутого свитка, на котором помещаются надписи, вензеля, эмблемы и т.п.

Каслинское литьё – художественные изделия (скульптура, садовые столики, решётки и т.д.) из чугуна, производимые на чугунолитейном заводе в городе Касли Челябинской области.

Кессоны – кассеты, квадратные, многоугольные или круглые углубления на потолке или внутренней поверхности арки, свода. Играют конструктивную и декоративную роль или служат для улучшения акустики.

Классицизм – художественный стиль в европейском искусстве XVII-начала XIX вв., одной из важнейших черт которого было обращение к формам античного искусства как к идеальному эстетическому эталону.

Кокошник – полукруглое или заострённое завершение фасада, свода.

Колонна - архитектурно обработанная круглая в сечении вертикальная опора, элемент несущей конструкции зданий и архитектурных ордоров. Состоит из ствола, капители и базы.

Консоль – выступ в стене, поддерживающий карниз, балкон или предназначенный для установки на нём каких-либо украшений.

Кровля – верхний водонепроницаемый слой крыши здания из толя, рубероида, битумных и других мастик, листовой стали и черепицы.

Кронштейн – консольная опорная деталь или конструкция, служащая для крепления частей сооружений к вертикальной стене или колонне. Конструктивно кронштейн выполняется в виде самостоятельной детали с раскосом или в виде значительного утолщения в базовой детали. В архитектуре, использующей ордерные элементы, кронштейн – обычно выступ в стене, часто профилированный (с декоративными завитками или другими украшениями). Служит для поддержки балконов, сильно выступающих карнизов и пр.

Купол – пространственное покрытие зданий и сооружений. Перекрывает, в основном, круглые, многоугольные, эллиптические в плане помещения. Купола бывают каменные, железобетонные, стальные.

Курдонер – парадный двор дворца, усадебного дома, особняка, образуемый основным корпусом и боковыми флигелями.

Лепнина – рельефные украшения (фигурные и орнаментальные) на фасадах и в интерьерах зданий, как правило, отлитые или отпрессованные из гипса, штукатурки, бетона или других материалов.

Лоджия – помещение, открытое с одной или нескольких сторон, где стену заменяют колоннада, аркада, парапет и т.д.

Лопатка, или лизена – плоская вертикальная полоса, выступающая на поверхности стены здания. Лопатка может быть конструктивным утолщением стены или иметь декоративное значение, являясь одним из средств членения фасадов.

Майолика – вид художественной керамики: изделия из цветной обожженной глины (с крупнопористым черепком) с яркой росписью, покрытые непрозрачной глазурью.

Мансарда – чердачное помещение под крутой с изломом крышей, используемое для жилья и хозяйственных целей. Название дано по фамилии французского архитектора XVII века Ф. Мансара.

Маньеризм (от итал. *maniera* – приём, манера) – *стиль* в искусстве, отличающийся злоупотреблением какими-либо приемами, какой-либо манерой, обычно формально воспринятыми от большого мастера или школы; характеризуется манерностью и вычурностью.

Мезонин – надстройка (часто с балконом) над средней частью жилого дома.

Модерн (от франц. *moderne* – новейший, современный) – *стиль* в европейском и американском искусстве конца XIX – начала XX вв. В различных странах приняты иные названия стиля "модерн": "ар нуво" (Art Nouveau) во Франции, Бельгии, "югендстиль" (Jugendstil) в Германии, "сецессион" (Sezession) в Австрии, "либерти" (Liberty) в Италии и др.

Монумент – памятник значительных размеров, предполагающий масштабное ансамблевое художественное решение.

Мрамор коелгинский – белый мрамор уральского месторождения Коелга.

Наличник – декоративное обрамление оконного проема. Состоит обычно из фронтона, двух вертикальных тяг (колонок или полуколонок) и подоконной части, часто украшаются резьбой (особенно в деревянной архитектуре).

Неоготика, или ложная готика, псевдоготика – стилизаторское *направление* в архитектуре XIX в., основанное на использовании готических архитектурных форм в сочетании с новыми конструкциями и строительными материалами

Неоклассицизм – общее название различных *течений* в искусстве второй половины XIX-XX вв., творческая практика которых основывалась на стилизации внешних форм искусства античности, эпохи Возрождения и классицизма.

Неорусский, или псевдорусский, ложнорусский стиль – общее условное название совокупности различных по своим идейным истокам *течений* в русской архитектуре, возникших во второй четверти XIX в. и представляющих собой синтез традиций древнерусского и русского народного зодчества, а также ассоциируемых с ними элементов византийской архитектуры.

Обелиск – памятник, сооружение в виде суживающегося кверху граненого каменного столба с пирамидально заострённой верхушкой.

Ордера архитектурные – (от лат. *ordo* – порядок), определённое сочетание несущих и несомых частей стоечно-балочной конструкции, их структура и художественная обработка. Ордер включает несущие части (колонна с капителью, базой, иногда с пьедесталом) и несомые (антаблемент). Классическая система ордеров сложилась в Древней Греции. Основные ордера, получившие название от греческих племён и областей: дорический (его разновидность – тосканский), ионический и коринфский (их разновидность – композитный).

Орнамент – узор, состоящий из ритмически упорядоченных элементов для украшения каких-либо предметов или архитектурных сооружений.

Панно – часть потолка, свода или стены, выделенная из общей поверхности бордюром и обычно заполняемая живописными или скульптурными изображениями; так же называются и сами изображения, заполняющие выделенное пространство.

Парапет – невысокая сплошная стенка, проходящая по краю крыши, террасы, балкона (в качестве ограждения).

Партер – открытая часть сада или парка с газонами, цветниками, водоемами, бордюрами из кустарника; так же называют и нижний этаж дома.

Пилоны – мощные столбы, служащие опорой плоских и сводчатых перекрытий.

Пилястра – плоский вертикальный выступ на поверхности стены, повторяющий части и пропорции колонны того или иного ордера.

Плафон – плоское перекрытие (потолок), украшенное живописью или лепкой.

Полуколонна, или пилястра – колонна, обычно полукруглая в плане, выступающая из плоскости стены на половину или на $\frac{3}{4}$ своего диаметра.

Портал – архитектурно оформленный вход в здание.

Портик – крытая галерея, выступающая вперёд часть здания, открытая на одну или три стороны и образуемая колоннами или арками, несущими перекрытие; чаще всего оформляет главный вход и завершается фронтоном или аттиком.

Постамент – подставка, на которой устанавливается произведение станковой скульптуры.

Поясок – декоративное лепное кольцо или лента в древнегреческой, романской и готической архитектуре; а также ряд кирпичной кладки над карнизом, особенно в классическом здании.

Прерафаэлиты (от лат. *prae* – перед и *Рафаэль*) – английские художники и писатели второй половины XIX в., ставившие целью возрождение "искренности", "наивной религиозности" средневекового и раннеренессансного искусства ("до Рафаэля").

Пьедестал – постамент, основание, на котором устанавливается произведение скульптуры (статуя, группа, бюст) либо ваза, колонна, обелиск и т. п.

Раскреповка – небольшой выступ плоскости фасада, антаблемента, карниза; применяется для членения или пластического обогащения фасада.

Расшивка – придание определенной формы лицевым швам кирпичной или каменной кладки.

Рельеф – вид скульптуры, в котором изображение является выпуклым (или углубленным) по отношению плоскости фона. Основные виды: барельеф и горельеф.

Ренессанс (от франц. *Renaissans* – возрождение) – общепринятое название эпохи, следовавшей в истории западноевропейского искусства за готической и продолжавшейся с середины XV до начала XVI вв. Главное, чем характеризуется эта эпоха – возвращение в архитектуре к принципам и формам античного, преимущественно, римского искусства.

Реминисценция (от лат. *reminiscentia* – воспоминание) – в художественном произведении (чаще всего поэтическом) отдельные черты, навеянные невольным или преднамеренным заимствованием образов или ритмико-синтаксических ходов из другого произведения (преимущественно чужого).

Ретроспектива – взгляд в прошлое, обозрение того, что было в прошлом.

Ризалит – выступающая часть здания, идущая во всю его высоту; ризалиты обычно расположены симметрично по отношению к центральной оси здания; составляя единое целое с основной массой постройки, вносят разнообразие в пространственную организацию фасада.

Рокайль – характерный для *рококо* мотив орнамента – стилизованная раковина моллюска.

Рококо (от орнаментального мотива *рокайль*) – *стиль*, получивший развитие в европейских пластических искусствах и литературе первой половины XVIII в.; возник во Франции в период кризиса абсолютизма, отразил свойственные аристократии гедонистические настроения, тяготение к бегству от действительности в мир театрализованной игры.

Романтизм – *направление* в литературе и искусстве конца XVIII – первой половины XIX в., боровшееся с канонами классицизма, стремившееся в национальному и индивидуальному своеобразию, к изображению идеальных героев и свободных чувств, не связанных долгом.

Роспись – декоративная живопись на стенах, потолках зданий и предметах быта.

Ротонда – центрическое сооружение, круглая в плане постройка (храм, мавзолей, павильон, зал), обычно увенчанная куполом.

Рустовка – архитектурная кладка или облицовка стен здания неотёсанными с наружной стороны камнями или камнями с искусственной шероховатостью; облицовка рустикой может быть выполнена и в штукатурке, воспроизводящей формы рустованной кладки.

Средневековье – историческая эпоха, охватывающая время от крушения Римской рабовладельческой империи (конец V в.) до начала капитализма (конец XVII в.)

Станция односводчатая –

Текто́ника (от др.-греч. *τεκτονική* – строение, построение) – точная наука (или интуитивное искусство) построения конструктивного целого. В отношении искусства (и эстетики вообще) тектоника может быть названа *видимой конструкцией целого*, выраженной через членение и соотношение конструктивных (несущих) частей художественной или архитектурной формы.

Тектоничность – одно из важнейших свойств, определяющих степень (или зримость) отражения на поверхности формы её конструктивной основы. Отчасти это понятие пересекается со структурой художественного целого. «Тектоничное произведение» в своём максимальном выражении имеет вид почти голой конструкции, к примеру, именно такого направления в качестве идеального образца придерживается конструктивизм и близкие ему течения (такие как футуризм, кубизм или супрематизм).

Торец – поперечная грань протяжённого объекта, по форме близкого к цилиндру или прямоугольному параллелепипеду. У цилиндрических объектов торец находится в плоскости, перпендикулярной продольной оси, и имеет форму круга. У прямоугольного параллелепипеда торцом называют, обычно, наименьшую по площади грань.

Фасад – лицевая, передняя сторона какого-либо здания, обращённая обыкновенно на улицу.

Фланирующий – разгуливающий, гуляющий.

Флигель – боковая пристройка жилого дома или небольшая жилая постройка во дворе большого здания.

Флора – растительный мир, растительность.

Флюгер – вращающаяся на мачте или шесте пластинка, флажок, стрела, показывающая направление ветра.

Фриз – в архитектурном ордере средняя часть антаблемента, между архитравом и карнизом; так же называют сплошную полосу декоративных скульптурных, живописных и других изображений (часто орнаментального характера), окаймляющую верх стен или поверхность пола помещения, поля ковра и пр.

Фронтон - завершение (обычно треугольное, реже лучковое) фасада здания, портика, колоннады, ограниченное двумя скатами кровли по бокам и карнизом у основания. Поле фронтона (тимпан) часто украшается скульптурой. Декоративные фронтоны украшают двери и окна зданий.

Хоромы (устар.) – в России большой жилой деревянный дом, часто состоявший из отдельных строений, объединённых сенями и переходами.

Цоколь – подножие здания или памятника, несколько выступающее относительно плоскости стены.

Шишак – древнерусский (преимущественно металлический) шлем традиционной луковичеобразной формы с длинным шпилем ("шишом"), вершина которого увенчивалась обычно небольшой шишкой.

Шпиль – вертикальное остроконечное завершение зданий в виде сильно вытянутых вверх конуса или пирамиды, увенчанный флагом и т.д.

Эклектика – художественное направление в архитектуре, ориентирующееся на использование в одном сооружении любых форм прошлого в любых сочетаниях; обычно имеет место в период смены больших художественных систем.

Экстерьер – внешний облик здания.

Эмблема (от лат. *emblema* – вставка, выпуклое изображение) – условное символическое изображение какого-либо понятия или идеи; в отличие от символа не воплощает содержания понятия, а лишь указывает на него.

Эркер – полукруглый, треугольный или многогранный остеклённый выступ в стене здания.

Литература

1. Алфёров Н.С. Свердловск (строительство и архитектура). Екатеринбург периода капитализма. – М. : Стройиздат, 1980. – 120с.
2. Блинова Т.Л., Унегова Т.А. Екатеринбург глазами математика //Математика в школе №7, 2014 – С. 35-43
3. Звагельская В.Е. Эkleктика в памятниках архитектуры Свердловской области. – Екатеринбург : [б. и.], 2007. – 160 с. :цв.ил.
4. Кулагина Г.А. История родного края. – 2 изд. – Свердловск: Сред.-Урал. кн. изд-во, 1983. – 88 с.
5. Лукьянин В.П., Никулина М. Прогулки по Екатеринбургу. – 2-е изд. – Екатеринбург : Банк культурной информации, 1995. – 240 с.
6. Стариков А.А., Звагельская В.Е., Токменинова Л.И., Черняк Е.В. Екатеринбург. История города в архитектуре. / Под ред. Старикова А. А. – Екатеринбург : 1998. – 237 с.

Математика и спорт

Сейчас уже нельзя назвать такой области деятельности людей, где математика не играла бы существенной роли.

Александров А. Д.

За последние десятилетия произошли существенные изменения условий жизни, произошёл качественный скачок в образовании, особенно в области точных наук. Возросший поток информации увеличил психологические нагрузки в сфере служебных обязанностей; занятия в школе стали более напряжёнными. Новые условия жизни, учебы и работы потребовали от молодёжи определённой психологической и физической устойчивости. Кто с детских лет занимается математикой, тот воспитывает в себе настойчивость, развивает внимание, тренирует мозг и упорство в достижении цели. В то же время занятие спортом благотворно влияет на умственную деятельность и психику человека, укрепляют его волю.

Поклонникам интеллектуальных игр полезно знать, что в спорте и спортивных играх ум, образование, расчет – вещи далеко не лишние. Так, например, хороший теннисист должен обладать разнообразной и тонкой техникой ударов. Это требует огромного труда. Но, выходя на корт, теннисист встречается с соперником, который, как правило, не уступает ему в технике. И здесь уже всё решают тактика, расчёт и предвидение. Современный спорт вообще становится в последние годы всё более интеллектуальным. Следует также иметь в виду, что не только шашки, шахматы, карточные игры или бильярд служат источником многих интересных задач, математические методы всё шире используются в спорте и современной экономике спорта. Рассмотрим некоторые примеры взаимодействий в паре математика и спорт.

Математика и легкая атлетика

В данном виде спорта крайне важны арифметические расчёты при разбеге прыгуна в длину для максимально чёткого попадания «шиповкой» на планку отталкивания. Также крайне важным арифметическим попаданием

является степень упругости шеста у прыгунов в высоту. Например, начало разбега при прыжке с шестом обычно занимает 4-6 шагов, и в этот период для его успешного выполнения необходимо:

1. Отрегулировать систему спортсменов-шест.
2. Сформировать модель первых шагов.
3. Определить ритм разбега, соотношение длины и частоты шагов.

Математика и шахматы

У математики и у шахмат много родственного. Выдающийся математик Г. Харди, проводя параллель между этими видами человеческой деятельности, заметил, что решение проблем шахматной игры есть не что иное, как математическое упражнение, а игра в шахматы – это как бы насвистывание математических мелодий. Формы мышления математика и шахматиста довольно близки, и не случайно математики часто бывают способными шахматистами. Шахматные фигуры, доска и сама игра часто используются для иллюстрации разнообразных математических понятий и задач.

Математика в экономике спорта

В современной экономике спорта довольно широко используется математический аппарат – анализируются графики различных зависимостей, выводятся математические формулы, проводится математическая обработка статистических данных.

Например, математические методы достаточно широко применяются в области накопления информации (статистика) и обработки данных:

1. Подготовка спортсменов: расчет нагрузки, питания.
2. Расчёт объективности условий игры.
3. Регистрация достижений, расчёт оценки судей.
4. Прогнозирование рекордов.

Рассмотрим подробнее каждую позицию.

1. Подготовка спортсменов: расчёт нагрузки, питания

При планировании тренировочного процесса в обязательном порядке производится математический расчёт различных видов тренировок. Не проводя математического моделирования той или иной тренировки, нельзя давать нагрузку спортсмену, так как в процессе учитываются: рост, вес, возраст, частота сердечных сокращений в минуту, показатели артериального давления, степень подготовленности спортсменов и многое другое. Только правильно спланированный и применённый тренировочный план не наносит вреда здоровью спортсмена, позволяет ему приобрести хорошую физическую форму и добиться значимых спортивных результатов.

Энергозатраты у спортсмена определяются большим числом составляющих. На них оказывают влияние:

- вид спорта,
- климато-географические условия тренировки,
- объём тренировки и её интенсивность,
- частота тренировок,
- состояние спортсмена при тренировке,
- температура тела спортсмена,
- профессиональная деятельность,
- пол,
- повышенный основной обмен,
- специфическое динамическое воздействие пищи,
- потери на пищеварение.

Если суточный рацион современного мужчины без активных физических нагрузок и без избыточного веса должен составлять 1500-1600 ккал, для женщин 1200-1300 ккал, то дневной рацион спортсмена при длительной нагрузке должен включать в себя 5500–6500 ккал для мужчин и 5000–6000 ккал для женщин. С помощью привычных продуктов питания, даже обладающих высокой биологической ценностью, нет возможности компенсировать значительные (до 6000–7000 ккал) суточные энергозатраты у

спортсменов и связанный с ними расход пластических веществ. Усложняют расчёт суточного рациона особые требования к водному и углеводному обмену (спортсмен не должен испытывать жажду и недостаток углеводов, как основных источников энергии).

Существуют специальные программы-калькуляторы для расчёта режима питания в различных видах спорта.

2. Расчёт объективности условий игры

Рассмотрим на примере арифметики тенниса.

Счёт мячей в гейме имеет особенности, сохранившиеся с тех времен, когда игра велась на «интерес». Во Франции ценой игры являлась монета в 60су. Она разменивалась на четыре монеты по 15 су. Эти последние и составляли цену четырёх ударов: 15, 30, 45, 60. Правда, в XX веке судьи стали лаконичнее, выкрикивая «сорок» вместо «сорок пять».

Итак, при выигрыше первого в гейме мяча, счёт становится 15:0. При выигрыше той же стороной второго мяча счёт становится 30:0 в её пользу. При выигрыше третьего мяча счёт становится 40:0, при выигрыше четвёртого мяча – 60:0, что и приносит завершение гейма в пользу этой стороны.

Если одна из сторон после выигрыша первого мяча второй мяч проиграла, то 15 засчитывается противнику и так далее. Каким может быть счёт в гейме, представлено на схеме 1.

Счет «ровно» может быть при равенстве очков у противников, начиная с шестого мяча, «больше»/«меньше» – начиная с седьмого мяча, если подающий выиграл/проиграл мяч после счёта «ровно». «Игра» подающего, если при счёте «больше» он выиграл следующий мяч, «игра» принимающего, когда при счёте «меньше» подающий проиграл следующий мяч.

По завершении первого гейма, начинается второй гейм, подача переходит к противоположной стороне. Сет считается завершённым, если один из противников выиграл не менее шести геймов и получил перевес не менее чем на два гейма. Следовательно, сет заканчивается, когда счёт равен:

6:0, 6:1, 6:2, 6:3, 6:4, 7:5, 8:6 и т.д. По окончании сета разыгрывается второй сет и так до тех пор, пока одна из сторон не выиграет две встречи (их трех) или три (из пяти) в зависимости от условий соревнований.

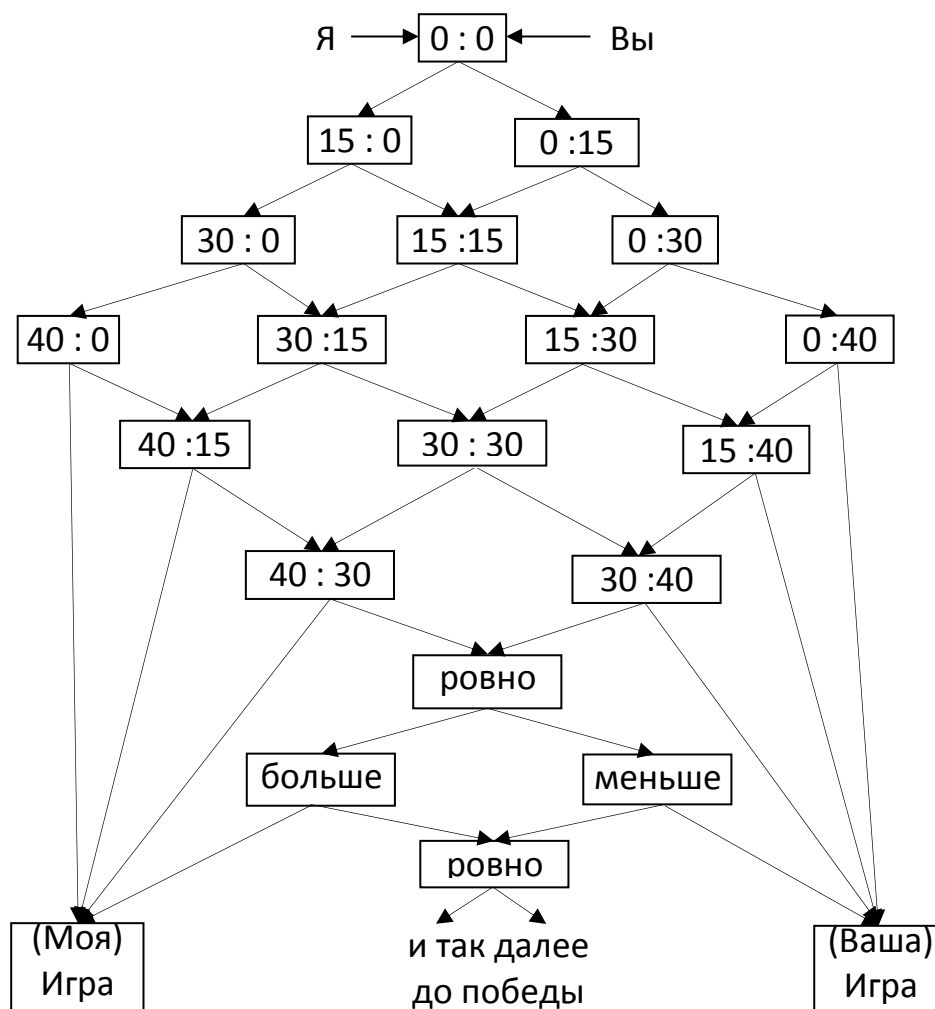


Схема 1. Каким может быть счет в гейме

При выигрыше одной из сторон двух сетов подряд, ей присваивается победа и больше сетов не разыгрывается. Следовательно, счёт встречи может быть 2:0, 2:1, или 3:2, 3:1 и т.д.

Таким образом, правила игры очень глубоко продуманы и ставят игроков в равные условия (выигрыш не менее чем в два мяча в гейме, два сета в игре), смена подач. Розыгрыш мяча имеет существенное, а иногда решающее значение для встречи, когда ход её колеблется подобно весам.

3.1 Регистрация достижений

Расстояние и время – важнейшие параметры в спорте при регистрации спортивных достижений (бег, плавание, всевозможные гонки и т.д.), в других видах спорта к ним добавляются поднятые килограммы, сложность и чистота исполнения акробатических элементов, выразительность. Следовательно, для определения победителя возникает необходимость количественного и качественного измерения результата.

На примере одного из наиболее престижных дисциплин «бег на 100 метров» можно наблюдать хронологию мировых рекордов и развития хронометража.

Фактор времени – важнейший в спорте. В одних видах состязаний просто идёт сражение за время – бег в легкой атлетике, лыжные и лодочные гонки, конькобежный и велосипедный спорт, плавание и прочее. Но в беге на 100 м, прежде всего у мужчин, цена секунды, даже её сотой доли, возрастает многократно. Обладатели рекордов в стометровке развивают максимально возможные для человека скорости и поэтому считаются самыми быстрыми людьми на планете. Ни один рекорд в легкой атлетике не приносит его автору столько славы, сколько лучший результат в коротком спринте.

Впервые электромеханическая система регистрации финиша появилась на Олимпийских играх в Стокгольме-1912, именно с этого года мировые рекорды на 100 м стали регистрироваться официально. Их список открыл Дональд Липпинкот (США) – 10,6 сек. Через девять лет на 0,2 сек. рекорд улучшил другой американец, Чарльз Пэддок – 10,4 сек. Прошло ещё девять лет, и в 1930-м канадец Перси Уильямс сбросил с рекорда одну десятую – 10,3 сек. И Пэддок, и Уильямс становились олимпийскими чемпионами.

В 1928 году был создан ручной механический хронограф-секундомер, имеющий точность до одной сотой секунды. Первые камеры для фиксации финиша с такой точностью появились в 1930-м, они использовались на Олимпийских играх в Лос-Анджелесе-1932, официальным хронометражистом которых была фирма Omega. Победителя на 100

мопределили по фотографиям – американцы Энди Тоулэн и Ральф Мэткалф показали одинаковое время – 10,38 сек.

Когда речь идет о сотых долях секунды, имеет значение любая мелочь: ветер, одежда и обувь спортсмена, подача стартового сигнала и многое другое. Кстати, 0,02 сек. соответствуют расстоянию 2 см (а 0,01 сек. – 1 см). Вспышка света такой продолжительности незаметна глазу человека.

Немаловажно, что при выстреле стартового пистолета старой модели звук быстрее достигал первой беговой дорожки, а до восьмой доходил в последнюю очередь. В зависимости от места нахождения судьи разница составляет от 0,025 до 0,052 секунды, что при фиксации рекордов с точностью до 0,01 секунд весьма существенно.

Теперь же применяется стартовый пистолет японской конструкции Seiko, оснащённый так называемой системой электронного звука, она запускает отсчёт времени одновременно со срабатыванием пистолета. Сигнал передаётся на колодки, снабжённые динамиками – довольно сложное электронное устройство, сигнал которого слышат все бегуны одновременно и которое регистрирует время старта с точностью до одной тысячной секунды. Наименьшее время реакции человека на звук (в том числе стартовый выстрел) считается равным 0,1 сек., более быстрый старт – это уже угадывание момента выстрела. Хотя данный вопрос до сих пор вызывает споры, движение с места раньше, чем на одну десятую секунды после выстрела, по правилам ИААФ является фальстартом.

Таким образом, человечество приближается к пределам своих скоростных возможностей, и развитие систем измерения оказываются напрямую связано с новыми мировыми достижениями.

3.2 Расчёт оценки судей

Судейство в фигурном катании, прыжках в воду, спортивной и художественной гимнастике оценивается группами судей, являющимися в своём виде спорта знатоками. Судьи оценивают в баллах не только сложность исполняемых элементов, но и чистоту, гармоничность, красоту,

артистичность исполнения. Естественно, что кроме требований, регламентированных правилами того или иного вида спорта, каждый судья при оценке упражнений пользуется своими субъективными представлениями в понимании красоты.

У спортсменов и болельщиков часто возникает вопрос, а почему в том или ином виде спорта принято судить так и не иначе? А ещё чаще возникает вопрос: как осуществляется судейство? Как формируются результаты? Проблемами, подобными спортивному судейству (так называемыми экспертными оценками) занимается раздел прикладной математики. Этот раздел изучает модели и методы организации экспертиз, обработку информации, получаемой от экспертов.

Под экспертизой понимается процедура, при которой одна группа лиц выясняет суждение другой группы лиц (экспертов) в целях принятия решения. Часто все члены группы высказываются, а затем на основе этих личных мнений принимается общее решение.

4. Прогнозирование рекордов

Результаты в беге на 100 м стали темой многих научных исследований. С помощью методов математического моделирования специалисты прогнозируют возможный рост рекордов, пытаясь найти человеческий предел, если он вообще существует. Так, французские математики Ф. Перонэ и Ж. Тибо в 1989 году подсчитали, что предельный результат равен 9,37 сек. Чарли Фрэнсис, тренер печально знаменитого Бена Джонсона, считает, что время 9,48 сек. будет показано только через 500 лет. А Эндрю Тейтем из Оксфордского университета проанализировал данные о мировых рекордах для мужчин и женщин в беге на 100 м, поставленных на Олимпийских играх с 1900 по 2004 год, и пришел к выводу, что на Играх 2156 года быстрее всех стометровку пробежит женщина. Она покажет время 8,079 сек., а её конкурент-мужчина – 8,098 сек.

2010 год в американской ассоциации математиков был признан годом спорта, в связи с чем в этом году были опубликованы работы американских

математиков в журнале «Mathematic sand Sports». В работе Reza Noubary «Whatisthe Speed Limitfor Men's 100 Meter Dash» выполнен прогноз окончательного мирового рекорда на мужской стометровке. По мнению авторов, выполнивших расчеты с применением:

- 1) длинных множеств распределения Pareto,
- 2) средних множеств показательного распределения,
- 3) короткого распределения множества с конечной точкой,
- 4) теории вероятностей,

окончательный мировой рекорд с вероятностью 90% будет лежать в интервале (9,40; 9,58)сек.

Рекомендации по использованию теоретического материала

В качестве практического применения теоретического материала можно включить в процесс обучения математике занятия по теме «Математические модели в спорте».

Содержание занятий

Тема занятия	Содержание занятия
1. Элементы комбинаторики	Перебор учащимися всевозможных расстановок игроков в баскетболе
2. Общая задача линейного программирования и задача о назначениях	Решение задачи о расстановке игроков в баскетбольной команде симплекс-методом

РАССТАНОВКА ИГРОКОВ В БАСКЕТБОЛЬНОЙ КОМАНДЕ

Опытный тренер, хорошо знающий своих игроков, обычно успешно справляется с проблемой распределения между ними игровых обязанностей. Задача, связанная с использованием запасных игроков в разных сочетаниях, оказывается более сложной, если команда имеет «длинную скамейку» (в команде много игроков примерно одного класса). В этом случае даже опытному тренеру может помочь рассмотрение соответствующей математической модели.

Рассмотрим ситуацию. Незадолго до ответственной встречи в команде

были заменены не только ряд игроков, но также и тренер. Его место занял новый, недостаточно опытный наставник, к тому же мало знакомый с отдельными игроками и с их возможностями. Перед новым тренером стоит задача: распределить между игроками команды обязанности таким образом, чтобы общая результативность действий всей команды оказалась наибольшей.

Придадим задаче, сформулированной на вербальном уровне, более точную форму и займемся построением её математической модели. Если ничего не знать об игроках, то нечего и решать – можно действовать наугад. Поэтому полезны даже ограниченные сведения. Следует воспользоваться каким-либо приёмом, позволяющим в приемлемые сроки познакомиться с возможностями всех игроков. Обычно поступают следующим образом. Членам команды предлагают серию тестов, позволяющих оценить их способности играть центровым, защитником, разводящим, на левом и правом флангах. Действия игроков, назовем их A , B , C , D , E , оцениваются в некоторых условных баллах.

Умудрённые опытом тренеры могут сказать: «К чему всё это, ведь каждый игрок имеет своё амплуа, и нечего ставить, скажем, центрального на левый край или разводящего на роль защитника». В определенной мере это так, но при наличии значительного числа запасных игроков проблема формирования команды, выставяемой на встречу, приобретает особую сложность. Решается она таким же методом, как поставленная выше упрощенная задача. В рамках этого же метода тренер может ответить и на такой вопрос: выпустить на игру двух центровых или двух защитников (вместо одного).

Итак, сведём результаты тестирования в баллах (см. табл. 1).

Понятно, что чем выше балл, тем предпочтительнее назначение игрока на соответствующее амплуа. Так, например, игрок B , вероятно, будет хорошим центровым и защитником, но слабым левым крайним, а игрок D , в общем-то, равно играет всюду, а центровым достаточно плохо.

Таблица 1

Игрок	Защитник	Центровой	Разводящий	Левый крайний	Правый крайний
A	3	4	2	2	1
B	4	5	3	1	3
C	4	3	1	1	1
D	3	1	2	2	2
E	1	3	1	2	1

Запомним смысл записанных в таблице чисел и будем работать только с матрицей баллов Γ :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вместе с тренером мы примем естественное предположение (*критерий эффективности*), согласно которому эффективность игры всей команды определяется суммой баллов, оценивающих игру каждого. Подобное предположение можно оспаривать и настаивать на ином критерии эффективности. Читатель вправе это сделать и предложить лучший вариант. Почти несомненно, что он окажется более сложным по своему строению. Выбранный нами критерий обладает огромным достоинством – он линейно зависит от баллов каждого игрока. Смысл этих слов станет ясным из последующего. Пока же рассмотрим одно из конкретных (малообдуманных) предложений: игрока A поставить защитником, B – в центр, C – разводящим, D – левым, а E – правым крайним. При такой расстановке (обозначим её буквой P) *эффективность* $\Phi(P)$ игры всей команды в баллах составит:

$$\Phi(P) = 3 + 5 + 1 + 2 + 1 = 12.$$

Расстановке P отвечает табл. 2. Она называется *матрицей назначений*, соответствующей расстановке P .

Таблица 2

Игрок	Защитник	Центровой	Разводящий	Левый крайний	Правый крайний
A	1	0	0	0	0
B	0	1	0	0	0
C	0	0	1	0	0
D	0	0	0	1	0
E	0	0	0	0	1

Смысл этой таблицы очевиден: единица на пересечении строки игрока A и столбца «Защитник» означает, что именно на эту роль A и назначен; нуль подтверждает, что соответствующая роль ему не отводится. Легко усмотреть, что в каждой строке и каждом столбце матрицы назначений имеется в точности по одной единице, тогда как остальные элементы – нули. Подобное строение матрицы является отражением непреложного требования: каждый игрок назначается точно на одно амплуа и на каждое амплуа назначается в точности один игрок. Всех возможных матриц назначения, то есть всех возможных способов расстановки игроков в команде столько, сколько существует различных перестановок из пяти элементов, а именно, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Среди этих матриц необходимо выбрать такую матрицу P^* (их может оказаться и несколько), которая определит расстановку с наибольшим значением эффективности по сравнению с другими матрицами P назначений. Запишем это требование в виде

$$\Phi(P^*) = \max \Phi(P).$$

Число 120 возможных вариантов не так уж велико, и, потрудившись перебрать, найдем матрицу назначений

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

которой соответствует наибольшая перспективность игры команды:

$$\Phi(P^*) = 4 + 3 + 4 + 2 + 2 = 15.$$

При такой расстановке A играет центровым, B – правым крайним, C – защитником, D – разводящим, E – левым крайним.

Впрочем, это решение оказалось не единственным оптимальным. То же наибольшее значение эффективности возникает при расстановке согласно матрице назначений P' :

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

для которой $\Phi(P') = 2 + 5 + 4 + 2 + 2 = 15$.

Итак, мы решили задачу, как говорят, «прямым перебором» возможных вариантов. Это удалось осуществить благодаря незначительному числу вариантов (малой размерности задачи). Положение резко изменится к худшему, если в распоряжении тренера имеются запасные игроки, которые к тому же (как и основные) с различными партнерами играют с различной результативностью. Будем считать, что результаты тестирования дают некоторые средние баллы, с учётом игры с разными партнёрами. Даже при наличии по одному запасному игроку на каждое место в команде, то есть при общем числе игроков, равном 10, соответствующая задача о назначениях требует перебора, вообще говоря, $10! = 3628800$ вариантов. Осуществление прямого перебора в этом случае немыслимо; можно лишь воспользоваться

ЭВМ. Для задачи о назначениях (она называется также задачей выбора) существует удобная для решения математическая модель. Модель формализуется в терминах линейного программирования – самого завершённого и нашедшего наиболее широкое применение раздела математического программирования, или, более широко, теории исследования операций.

Построим математическую модель задачи о назначениях. Удобства ради припишем игрокам A, B, C, D, E , соответственно номера i , принимающие значения от 1 до 5 (пишут ещё так: $i = \overline{1,5}$). Аналогично, обозначим номерами $j = \overline{1,5}$ обязанности защитника, центрального, разводящего, левого и правого крайних соответственно. Затем введём в рассмотрение 25 неизвестных x_{ij} , где $i = \overline{1,5}$, $j = \overline{1,5}$, значения которых мы станем интерпретировать как указания о назначении игрока под номером i на выполнение обязанностей типа j . При этом каждая из переменных x_{ij} может принимать лишь одно из двух возможных значений:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если игрок } i \text{ назначен на роль } j, \\ 0, & \text{в ином случае.} \end{cases}$$

Совокупность неизвестных пока величин x_{ij} составляет матрицу назначений

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix}$$

Численные реализации таких матриц нам уже встречались в разобранном ранее примере. Уже известно, что в каждой строке и каждом столбце матрицы X лишь единственный из элементов равен 1, остальные

равны нулю. Это обязательное условие (ограничение) может быть записано в соответствующей форме: сумма всех элементов по каждой строке и сумма всех элементов по каждому столбцу равна 1:

$$(1): \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 1, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 1, \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} = 1, \end{cases} \text{ и } (2): \begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 1, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 1, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} = 1. \end{cases}$$

К этому следует присоединить требование неотрицательности неизвестных

$$(3): x_{ij} \geq 0 \text{ при всех } i = \overline{1,5}, j = \overline{1,5}.$$

Игрок под номером i , назначенный на амплуа j , внесет свою долю в общую эффективность $\Phi(X)$ в размере $a_{ij} \cdot x_{ij}$. Здесь a_{ij} – элемент соответствующей матрицы баллов Γ , расположенный на пересечении её i -ой строки и j -го столбца. Общая эффективность игры команды составит сумму из 25 слагаемых. В нашем конкретном примере (см. табл. 1) получаем:

$$\Phi(X) = 3x_{11} + 4x_{12} + \dots + x_{55}.$$

Поиск матрицы назначений X , доставляющей целевой функции $\Phi(X)$ наибольшее значение, сводится к следующей математической задаче:

Среди всех неотрицательных решений $x_{ij} \geq 0$ ($i, j = \overline{1,5}$) системы ограничений (1), (2) и (3) выбрать такое, которое придаёт функции $\Phi(X)$ наибольшее значение (оптимизирует $\Phi(X)$).

Сформулированная задача и есть математическая модель задачи о распределении обязанностей в баскетбольной команде (при отсутствии запасных игроков).

Если же допустить, что игроков в команде $n > 5$, то дополнительно к известным пяти надо ввести еще $k = n - 5$ фиктивных амплуа (мест в

команде), считая, что на каждом из них тестовый балл a_{ij} ($i = \overline{1,5}, j = \overline{6,n}$) каждого из игроков равен нулю. После такого шага приходим к известной уже задаче о выборе при равном числе претендентов и мест в команде. Возникает математическая модель, отличающаяся от приведённой выше, только числом переменных x_{ij} и числом ограничений.

Аналогичным путём могут быть сформулированы и просчитаны различные варианты задач, в которых, например, некоторые места сохраняются за основным составом, а остальные места распределяются между запасными игроками.

Решение общей задачи о назначениях может быть осуществлено универсальным симплекс-методом.

Поскольку рассмотренная выше задача о расстановке баскетболистов (с 25 неизвестными!) уже решена полным перебором, то проиллюстрируем работу симплекс-метода на задаче попроще – с матрицей баллов

$$G = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \text{девятью} \quad \text{неизвестными} \quad X = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix},$$

образующими матрицу назначений, все элементы которой неотрицательны. По смыслу задачи сумма элементов каждой строки матрицы X и каждого её столбца должна равняться 1, поэтому задача сводится к решению системы, состоящей из шести линейных уравнений с девятью неизвестными. Как правило, такая система имеет бесконечно много решений. Из этого множества необходимо выбрать такое её решение, которое придаст функции

$$\Phi(X) = 3x_{11} + 2x_{12} + x_{13} + x_{21} + 2x_{22} + x_{23} + 2x_{31} + 3x_{32} + x_{33}$$

наибольшее значение.

Шаг 1. Записываем систему и решаем её методом Гаусса.

Метод Гаусса представляет собой обобщение метода алгебраического сложения, когда одно из уравнений системы заменяют линейной комбинацией двух (или более) уравнений системы, преследуя заранее

поставленные цели. Нетрудно видеть, что при этом вся работа проводится только с коэффициентами при неизвестных и свободными членами. В связи с этим от системы уравнений перейдем к матрице системы, состоящей как раз из коэффициентов при неизвестных и свободных членов. Итак, слева выписываем систему уравнений, которую надо решить, а справа её матрицу:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1 \end{array} \right. ; \begin{array}{cccccccccc|c} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{31} & x_{32} & x_{33} & b \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

В верхней строке полученной матрицы выписаны все неизвестные и свободный член, обозначенный буквой b . В следующей строке (считаем её первой) стоят коэффициенты при соответствующих неизвестных из первого уравнения системы, причём, если неизвестное отсутствует, то коэффициент при нём равен 0. Таким же образом заполняем все оставшиеся строки.

Будем рассматривать линейные комбинации строк матрицы (читай – уравнений системы), чтобы получить матрицу, в которой под главной диагональю стоят нули. Для этого сделаем несколько действий:

1. К каждому элементу четвёртой строки матрицы прибавим сумму соответствующих ему элементов двух последних строк и вычтем сумму соответствующих ему элементов трёх первых строк. В результате, в четвёртой строке окажутся одни нули, и строка может быть удалена без ущерба для решения системы. Получим матрицу с пятью строками:

$$\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

2. Поменяем местами два столбца – пятый и восьмой (и не забудем переместить соответствующие неизвестные тоже):

$$\begin{array}{cccccccc|c}
 x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{21} & x_{32} & x_{23} & x_{31} & x_{22} & x_{33} & b \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
 \end{array}$$

Получили матрицу, в первых пяти столбцах которой по главной диагонали стоят единицы, а под главной диагональю – одни нули (то, к чему стремились).

3. Усовершенствуем ещё немного нашу матрицу. Для этого из второй строки вычтем пятую строку и результат запишем вместо второй строки, а из первой строки вычтем четвёртую строку и результат запишем вместо первой строки:

$$\begin{array}{ccccc|cccc|c}
 x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{21} & x_{32} & x_{23} & x_{31} & x_{22} & x_{33} & b \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
 \end{array}$$

Теперь не только *под* главной диагональю матрицы, состоящей из пяти первых столбцов, стоят нули, но и *над* нею тоже.

Полученная матрица состоит из коэффициентов при неизвестных и свободных членов уравнений исходной системы после проведённых преобразований. Эти преобразования уравнений системы приводят к равносильной системе, поскольку она имеет то же множество решений, что и исходная система. В результате выделяются четыре неизвестных x_{23} , x_{31} , x_{22} , x_{33} , которые получают статус свободных неизвестных (им можно

придавать любые значения) и пять базисных $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{32}$, которые можно выразить через свободные.

Итак, выпишем систему уравнений, соответствующую полученной матрице, а рядом с ней выражение первых слагаемых (базисных неизвестных) каждого уравнения через остальные (свободные) неизвестные:

$$\begin{cases} x_{11} - x_{23} + x_{31} - x_{22} = 0 \\ x_{12} - x_{31} + x_{22} - x_{33} = 0 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1 \\ x_{21} + x_{23} + x_{22} = 1 \\ x_{32} + x_{31} + x_{33} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{11} = x_{23} - x_{31} + x_{22} \\ x_{12} = x_{31} - x_{22} + x_{33} \\ x_{13} = 1 - x_{23} - x_{33} \\ x_{21} = 1 - x_{23} - x_{22} \\ x_{32} = 1 - x_{31} - x_{33} \end{cases}$$

Делаем вывод: исходная система имеет бесконечно много решений, и последняя получившаяся система дает ответ на вопрос, как они выглядят: 4 неизвестных, стоящих справа, могут принимать любые действительные значения, а оставшиеся 5 вычисляются по полученным равенствам.

Так, если все свободные неизвестные принять равными нулю, то из уравнений системы получим $x_{11} = x_{12} = 0$; $x_{13} = x_{21} = x_{32} = 1$, и решением системы будет упорядоченная девятка чисел $(0; 0; 1; 1; 0; 0; 0; 1; 0)$, которая дает функции эффективности первое значение

$$\Phi(X) = 3x_{11} + 2x_{12} + x_{13} + x_{21} + 2x_{22} + x_{23} + 2x_{31} + 3x_{32} + x_{33} = 5.$$

Чтобы ответить на вопрос, не увеличит ли другое решение эффективность сделанного выбора, делаем следующий шаг.

Шаг 2. Выразим функцию $\Phi(X)$ эффективности игры через свободные неизвестные, подставляя в $\Phi(X)$ вместо базисных неизвестных их выражения через свободные из последней системы. Тогда получим, что

$$\Phi(X) = 5 + 2x_{23} - 2x_{31} + 2x_{22} - x_{33}.$$

Выбранный нами вариант $x_{23} = x_{31} = x_{22} = x_{33} = 0$ дает $\Phi(X) = 5$. Так как все неизвестные x_{ij} неотрицательны, а в выражении для $\Phi(X)$ имеются

положительные коэффициенты, то можно попытаться увеличить значение неизвестного x_{23} (или x_{22}), увеличив тем самым значение функции $\Phi(X)$.

Шаг 3. Возьмём другое из двух возможных значений неизвестного x_{23} , то есть, положим, что $x_{23} = 1$. Тогда из четвёртого уравнения системы получим, что $x_{21} = 0$, и можно выбрать новую четвёрку свободных неизвестных: $x_{21}, x_{31}, x_{22}, x_{33}$. Неизвестные $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{32}$ станут при этом базисными. Выразим далее новые базисные через новые свободные неизвестные:

$$\begin{cases} x_{23} = 1 - x_{21} - x_{22} \\ x_{11} = (1 - x_{21} - x_{22}) - x_{31} + x_{22} \\ x_{12} = x_{31} - x_{22} + x_{33} \\ x_{13} = 1 - (1 - x_{21} - x_{22}) - x_{33} \\ x_{32} = 1 - x_{31} - x_{33} \end{cases}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_{23} = 1 - x_{21} - x_{22} \\ x_{11} = 1 - x_{21} - x_{31} \\ x_{12} = x_{31} - x_{22} + x_{33} \\ x_{13} = x_{21} + x_{22} - x_{33} \\ x_{32} = 1 - x_{31} - x_{33} \end{cases}.$$

Выражение для функции $\Phi(X)$ тоже изменится:

$$\Phi(X) = 5 + 2(1 - x_{21} - x_{22}) + 2x_{22} - x_{33} = 7 - 2x_{21} - 2x_{31} - x_{33}.$$

Полагая, что новая свободная четвёрка принимает нулевые значения: $x_{21} = x_{31} = x_{22} = x_{33} = 0$, находим, что $x_{23} = x_{11} = x_{32} = 1$, $x_{12} = x_{13} = 0$ и $\Phi(X) = 7$. Так как в этом случае коэффициенты при неизвестных в выражении $\Phi(X)$ отрицательные, то значение $\Phi(X) = 7$ является максимально возможным.

Итак, один из наилучших вариантов в нашей упрощённой задаче –

вариант с матрицей назначений $X = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$

Замечание. Задача с 25-ю неизвестными решается точно так же, как и разобранный пример. Даже приведение матрицы системы к диагональному виду проводится совершенно аналогично.

Литература

1. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М. : Советское радио, 1972. – 552 с.
2. Гупало Е. Бег на 100 метров и спортивный хронометраж // Наука и жизнь. – 2007. – №8. – С. 25-30.
3. Садовский Л.Е., Садовский А.Л. Математика и спорт // Квант. – 1985. – №44. – С. 192.

Т. Л. Блинова, Т. А. Унегова

**Модель деятельности учителя математики по
формированию представлений
учащихся о значимости математики в жизни современного
общества**

Подписано в печать 10.07.2014 Формат 60x84 1/16

Бумага для множ. ап. Гарнитура «Таймс». Печать на ризографе.

Усл. печ. л. 9 Тираж 100 экз. Заказ №

Редакционно-издательский отдел ФГБОУ ВПО «Уральский государственный
педагогический университет»
Отдел множительной техники

620017, г. Екатеринбург, пр. Космонавтов, 26

e-mail: uspu@uspu.ru